Applicazioni Lineari

(1) Determinare quali delle seguenti applicazioni sono lineari:

$$\begin{aligned}
f_1 &: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 & f_1(x,y) &= (x+y, 2x-y, y-x) \\
f_2 &: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 & f_2(a,b,c) &= (a+2b-c, a-b-c) \\
f_3 &: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 & f_3(a,b) &= (a^2, a-b) \\
f_4 &: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 & f_4(x,y,z) &= (x,y,z) + (1,0,1) \\
f_5 &: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 & f_5(\vec{v}) &= 3\vec{v} \\
f_6 &: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 & f_6(x,y) &= (x-y, x+y+1
\end{aligned}$$

(2) Sono dati i vettori di $\mathbb{R}^3$

$$\vec{u} = (1,1,0) \qquad \vec{v} = (1,0,1) \qquad \vec{w} = (0,1,1)$$

Provare che esiste un unico endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$f(\vec{u}) = (0,1,1) \qquad f(\vec{v}) = (0,2,2) \qquad \vec{w}) \in Kerf.$$

Determinare una base di $Im(f)$ e di $Ker(f)$ e $f(0,1,1)$

(3) Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f(x,y,z) = (-x+2y+3z, kx-4y-6z, x+kz)$$

Si determinino i sottospazi $Kerf$ e Imf, se ne calcoli una base e si verifichi il teorema del rango, al variare del parametro reale k.

(4) Sia $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f(x,y,z,t) = (x+ky+t, kx+4y+2t, x+z+t)$$

Si determinino i sottospazi $Kerf$ e Imf, se ne calcoli una base e si verifichi il teorema del rango, al variare del parametro reale k.

(5) Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita da

$$f(x,y,z) = (k^2x+y, kx+y-(k-1)z)$$

- Trovare i valori di k per cui f non è suriettiva.
- Si determinino, per ogni valore di k, una base per i sottospazi $Kerf$ e Imf.

(6) Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$f(a,b,c) = (a+b, 2c, a^2-b^2)$$

Provare che$f$ non è lineare. Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ costituito dalle terne (x,x,z) al variare di$x$ ez in$\mathbb{R}$. Provare che la restrizione di f a Vè lineare e determinarne immagine e nucleo.

(7) Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$f(a,b,c) = (2a+b+c, a+b+3c, 4a+2c)$$

Provare che f è un isomorfismo.

(8) Consideriamo lo spazio vettoriale M delle matrici 2×2 a coefficienti reali. Sia $T : M \longrightarrow M$ l'applicazione definita da $T(X) = AX$, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Si verifichi che T è lineare e si trovi la matrice $M(T)$ associata a T rispetto alla base canonica.
- Verificare che T è bijettiva e determinare T^{-1}.
- Si trovi una base per gli autospazi di T.

(9) Siano $S : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ le applicazioni lineari definite da

$$\begin{aligned} S(x,y,z,t) &= (x+y-z+t, 4x+3y+z, 4x+y+2z+2at) \qquad a\in\mathbb{R} \\ T(x,y,z) &= (x-3y+z, x+3y+z, 4x+bz) \qquad b\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

- Si dica per quali valori di a e b la trasformazione lineare $T\circ S : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ risulta suriettiva e per quali valori è iniettiva, si determinino le matrici associate a S, T e $T\circ S$ rispetto alle basi canoniche;
- Siano $a = b = 0$ si determini:

a) una base di $KerS$, $KerT$, $Ker(T\circ S)$; e una base di ImS, ImT, $IM(T\circ S)$;
b) una base per gli autospazi di T.
c) posto $V = ImS \cap Im(T\circ S)$, si determini $(T\circ S)^{-1}(V)$.

(10) Sia E un K-spazio vettoriale di dimensione n e $B = \{e_i\}$ una base di E. Sia $T : E \longrightarrow K$ una applicazione lineare non nulla su E definita da

$$T(e_i) = a_i \qquad \text{con} \qquad a_i \in K, \qquad i = 1,\cdots,n.$$

Si consideri l'applicazione $b : E\times E \longrightarrow K$ definita da:

$$b(x,y) = T(x)T(y) \qquad \forall (x,y)\in E\times E.$$

- Dire se b costituisce un prodotto scalare su E.
- Quale è la matrice che rappresenta b rispetto alla base B?

(11) Consideriamo lo spazio vettoriale M delle matrici 2×2 a coefficienti reali. Sia B la sua base canonica. Sia $F : M \longrightarrow M$ l'applicazione definita da

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

a) Si verifichi che F è lineare e si trovi la matrice $M(F)$ che rappresenta F rispetto a B.
b) Si trovi una base per gli autospazi di F.

(12) Sia f l'endomorfismo dello spazio reale $\mathbb{R}^4$ a cui, rispetto alla base canonica è associata la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 2 & 3 \\ c & d & 2 & 2 \\ e & f & 2 & 0 \\ g & h & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{R},$$

i) Calcolare gli elementi incogniti della matrice A sapendo che: $f(e_2) = f(e_3) + f(e_4)$ e che $f^2(e_4) = f(f(e_4)) = 0$.
ii) Determinare il sottospazio vettoriale $H = Imf \cap Kerf$ e l'insieme delle controimmagini di H.
iii) Si trovi una base per gli autospazi di f.

(13) Sia W lo spazio vettoriale dei polinomi della variabile x a coefficienti reali di grado ≤ 2. Consideriamo l'applicazione $f : W \longrightarrow W$ definita da

$$f(P(x)) = P'(x) + 3P(x).$$

Dove $P'(x)$ è la derivata di $P(x)$ rispetto a x.
a) Verificare che l'applicazione f è lineare; dire se è iniettiva, suriettiva, biiettiva;
b) verificare che i polinomi $q_1(x) = 2 + x, q_2(x) = x + x^2, q_3(x) = x - x^2$, costituiscono una base di W;
c) determinare la matrice di f rispetto alla base usuale dei polinomi.;
d) determinare gli autovalori e gli autovettori di f.

(14) Sia $V = \mathbb{R}^4$ e sia f l'endomorfismo di V a cui, rispetto alla base canonica, è associata la matrice:

$$A_k = \begin{pmatrix} -1 & 2k & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & (2-2k) & (k-2 & 1 \\ -1 & (2k-1) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcolare la dimensione di $KerT_k$ e di ImT_k al variare di $k \in \mathbb{R}$.
b) Stabilire per quali valori di k il vettore $v = (0, 1, 2, (k-7)) \in ImT_k$
c) Determinare la dimensione e una base per i sottospazi vettoriali $U = KerT_4$ e $W = ImT_4$ e ottenuti per $k = 4$.
d) Calcolare (sempre per $k = 4$) le dimensioni di $U + W$ e di $U \cap W$.

(15) Siano $V = \mathbb{R}^3$ e $W = \mathbb{R}^4$. Stabilire per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa giustificando adeguatamente la risposta.
a) Non esistono trasformazioni lineari suriettive da V a W.
b) Non esistono trasformazioni lineari iniettive da V a W.
c) Ogni insieme di 3 vettori di V è linearmente dipendente.
d) Ogni insieme di 4 vettori di W è linearmente indipendente.