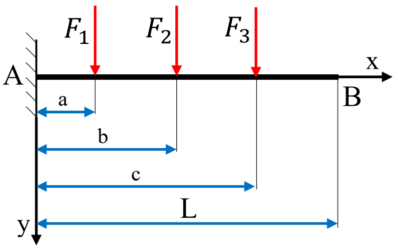
Università degli Studi di Cagliari - Facoltà di Ingegneria e Architettura

Fondamenti di Costruzioni Meccaniche

Applicazioni del Teorema di Betti

Esercizio N.1

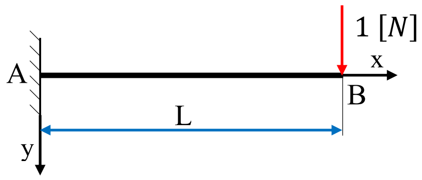


La trave a mensola AB indicata nella figura a lato, ha sezione trasversale costante ed è sottoposta a tre carichi concentrati F_1, F_2 ed F_3 applicati rispettivamente alle coordinate $x = a, x = b$ e $x = c$ come indicato in figura. Determinare lo spostamento verticale e la rotazione del punto B.

<u>Soluzione</u>

Se integrassimo due volte l'equazione della linea elastica nei quattro tratti in cui è divisa l'asta, dovremmo trovare 8 costanti d'integrazione, cioè c_1 e c_2 nel primo tratto (tra l'incastro e la forza F_1), c_3 e c_4 nel tratto compreso tra la forza F_1 e la forza F_2, c_5 e c_6 nel tratto compreso tra la forza F_2 e la forza F_3 e c_7 e c_8 nel tratto compreso tra la forza F_3 ed il punto B.

Il Teorema di Betti consente di risolvere il problema più rapidamente, integrando solo due volte l'equazione della linea elastica tra il punto A ed il punto B. Per il calcolo dello spostamento verticale del punto B utilizziamo una struttura fittizia, identica a quella originale, ma caricata da una forza unitaria nel punto B.



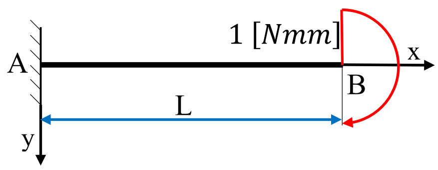
Il Teorema di Betti afferma che il lavoro indiretto fatto dalla forza unitaria grazie allo spostamento v_B del punto B provocato dalle tre forze concentrate F_1, F_2 ed F_3 è uguale al lavoro indiretto che le tre forze concentrati F_1, F_2 ed F_3 fanno grazie agli spostamenti v_1, v_2 e v_3 dei rispettivi punti di applicazione causati dalla forza unitaria.

In altri termini:

$$1 \cdot v_B = F_1 v_1 + F_2 v_2 + F_3 v_3 \qquad (1)$$

Integrando due volte l'equazione della linea elastica relativa alla struttura fittizia, siamo in grado di calcolare v_1, v_2 e v_3 e quindi di calcolare lo spostamento v_B usando l'equazione (1).

Per il calcolo della rotazione del punto B applichiamo sulla stessa struttura fittizia, una coppia unitaria nel punto B.



Il Teorema di Betti afferma che il lavoro indiretto fatto dalla coppia unitaria grazie alla rotazione ϑ_B del punto B provocato dalle tre forze concentrate F_1, F_2 ed F_3 è uguale al lavoro indiretto che le tre forze concentrati F_1, F_2 ed F_3 fanno grazie agli spostamenti v_1, v_2 e v_3 dei rispettivi punti di applicazione causati dalla coppia unitaria.

In altri termini:

$$1 \cdot \vartheta_B = F_1 v_1 + F_2 v_2 + F_3 v_3 \qquad (2)$$

Integrando due volte l'equazione della linea elastica relativa alla struttura fittizia, siamo in grado di calcolare v_1, v_2 e v_3 e quindi di calcolare la rotazione ϑ_B usando l'equazione (2).

ATTENZIONE AL DIVERSO SIGNIFICATO CHE ASSUMONO LE VARIABILI v_1, v_2 e v_3 NELLE EQUAZIONI (1) e (2).

Ricordiamo l'equazione della linea elastica:

$$E \cdot J_z \cdot \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = -M(x)$$

dove l'asse x ha origine nel punto A (all'incastro) e coincide con l'asse della trave, lo spostamento $v(x)$ è orientato come l'asse y verso il basso e l'asse z (rispetto al quale si calcola il momento principale d'inerzia J_z) è orizzontale e passa per il baricentro della sezione trasversale della trave.

Nel caso della prima struttura fittizia (quella caricata da una forza unitaria in B) l'equazione del momento flettente è la seguente:

$$M(x) = F \cdot (x - L)$$

dove $F = 1\ [N]$. Integrando una prima volta l'equazione della linea elastica otteniamo:

$$E \cdot J_z \cdot \frac{dv(x)}{dx} = E \cdot J_z \cdot \vartheta(x) = -F \cdot \int (x - L) \cdot dx = -F \cdot \left(\frac{x^2}{2} - L \cdot x + c_1\right)$$

Integrando una seconda volta otteniamo:

$$E \cdot J_z \cdot v(x) = \int -F \cdot \left(\frac{x^2}{2} - L \cdot x + c_1\right) \cdot dx = -F \cdot \left(\frac{x^3}{6} - L \cdot \frac{x^2}{2} + c_1 \cdot x + c_2\right)$$

Le condizioni al contorno sono le seguenti:

a) Per x = 0 $\qquad y(0) = 0 \rightarrow c_2 = 0$

b) Per x = 0 $\qquad \vartheta(0) = 0 \rightarrow c_1 = 0$

Di conseguenza, l'equazione della linea elastica è la seguente:

$$v(x) = \frac{-F \cdot \left(\frac{x^3}{6} - L \cdot \frac{x^2}{2}\right)}{E \cdot J_z} = \frac{F \cdot x^2 \cdot (3 \cdot L - x)}{6 \cdot E \cdot J_z}$$

Gli spostamenti v_1, v_2 e v_3 dei punti di applicazione delle tre forze F_1, F_2 ed F_3 si trovano sostituendo, nell'ultima equazione, la generica coordinata x con i valori a, b e c (vedi figura):

$$v_1(x = a) = \frac{a^2 \cdot (3 \cdot L - a)}{6 \cdot E \cdot J_z} \quad ; \quad v_2(x = b) = \frac{b^2 \cdot (3 \cdot L - b)}{6 \cdot E \cdot J_z} \quad ; \quad v_3(x = c) = \frac{c^2 \cdot (3 \cdot L - c)}{6 \cdot E \cdot J_z}$$

dove è stato posto $F = 1\ [N]$.

Lo spostamento verticale del punto B vale (vedi eq.(1)):

$$v_B = F_1 v_1 + F_2 v_2 + F_3 v_3 = \frac{F_1[a^2 \cdot (3 \cdot L - a)] + F_2[b^2 \cdot (3 \cdot L - b)] + F_3[c^2 \cdot (3 \cdot L - c)]}{6 \cdot E \cdot J_z}$$

Nel caso della seconda struttura fittizia (quella caricata da una coppia unitaria in B) l'equazione del momento flettente è la seguente:

$$M(x) = -1$$

Integrando una prima volta l'equazione della linea elastica otteniamo:

$$E \cdot J_z \cdot \frac{dv(x)}{dx} = E \cdot J_z \cdot \vartheta(x) = \int dx = x + c_1$$

Integrando una seconda volta otteniamo:

$$E \cdot J_z \cdot v(x) = \int (x + c_1) \cdot dx = \left(\frac{x^2}{2} + c_1 \cdot x + c_2\right)$$

Le condizioni al contorno sono le seguenti:

a) Per x = 0 $\quad y(0) = 0 \rightarrow c_2 = 0$

b) Per x = 0 $\quad \vartheta(0) = 0 \rightarrow c_1 = 0$

Di conseguenza, l'equazione della linea elastica è la seguente:

$$v(x) = \frac{x^2}{2 \cdot E \cdot J_z}$$

Gli spostamenti v_1, v_2 e v_3 dei punti di applicazione delle tre forze F_1, F_2 ed F_3 si trovano ponendo rispettivamente $x = a$, $x = b$ e $x = c$:

$$v_1(x = a) = \frac{a^2}{2 \cdot E \cdot J_z} \quad ; \quad v_2(x = b) = \frac{b^2}{2 \cdot E \cdot J_z} \quad ; \quad v_3(x = c) = \frac{c^2}{2 \cdot E \cdot J_z}$$

La rotazione del punto B vale quindi (vedi eq.(2)):

$$\vartheta_B = F_1 v_1 + F_2 v_2 + F_3 v_3 = \frac{F_1 a^2 + F_2 b^2 + F_3 c^2}{2 \cdot E \cdot J_z}$$