
Subvariedades bi-harmônicas de
variedades homogêneas tridimensionais

Apoenã Passos Passamani

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura:

Subvariedades bi-harmônicas de variedades homogêneas tridimensionais

Apoenã Passos Passamani

Orientadora: *Profa. Dra. Irene Ignazia Onnis*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências - Matemática.
VERSÃO REVISADA.

USP – São Carlos
Junho/2011

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

P285s Passamani, Apoenã Passos
Subvariedades bi-harmônicas de variedades
homogêneas tridimensionais / Apoenã Passos
Passamani; orientadora Irene Ignazia Onnis -- São
Carlos, 2011.
73 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em
Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e
de Computação, Universidade de São Paulo, 2011.

1. subvariedades bi-harmônicas. I. Onnis, Irene
Ignazia, orient. II. Título.

Às minhas três lindas e amáveis irmãs.

Agradecimentos

A Deus, pelo seu cuidado e dedicação e por ter me dado força para concluir essa etapa da minha vida.

À minha amada família que sempre me apoiou e me deu muitas felicidades e orgulho. Em especial um agradecimento ao meu pai e a minha mãe, que estiveram ao meu lado, mesmo distante, dando força e incentivo nos momentos mais difíceis e por ter me estruturado para buscar e concluir mais este sonho.

À minha namorada que se mostrou uma verdadeira companheira, mesmo com a distância que nos separa.

Aos amigos, os de longa data que são quase irmãos e que nem a distância enfraqueceu nossa amizade. Aos recentes, que são queridos e que foram de vital importância para que eu cumprisse essa etapa de minha vida, longe de minha família.

Ao prof. Ricardo Soares Leite por me ajudar a reencontrar motivação em meus estudos e por ter sido um bom conselheiro.

À minha orientadora prof^a. Irene Ignazia Onnis por ter sido atenciosa, dedicada, incentivadora e extremamente paciente.

Por fim, agradeço a CNPq e a Fapesp pelo suporte financeiro.

Resumo

Neste trabalho estudamos alguns resultados importantes sobre a teoria das subvariedades bi-harmônicas de espaços homogêneos tridimensionais. Existem três classes de espaços homogêneos tridimensionais simplesmente conexos dependendo da dimensão do grupo de isometrias, que pode ser: 3, 4 ou 6. No caso da dimensão ser 6, M é uma forma espacial; se a dimensão do grupo de isometrias for 4, M é isométrica a: \mathbb{H}_3 (grupo de Heisenberg), $SU(2)$ (grupo unitário especial), $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ (revestimento universal do grupo linear especial), ou aos espaços produtos $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Feita exceção para \mathbb{H}^3 , no caso da dimensão ser 4 ou 6 o espaço homogêneo é localmente isométrico a (uma parte de) \mathbb{R}^3 , munido de uma métrica que depende de dois parâmetros reais. Tal família de métricas aparece primeiramente no trabalho [3] de L. Bianchi e, mais tarde, nos artigos [14, 35] de É. Cartan e G. Vranceanu, respectivamente.

Nesse projeto de mestrado, queremos estudar (essencialmente) resultados de existência e classificação de subvariedades bi-harmônicas nesses espaços, também conhecidos como variedades de Bianchi-Cartan-Vranceanu.

Abstract

In this work we study some important results about the theory of the bi-harmonic submanifolds of 3-dimensional homogeneous spaces. There exist three classes of simply connected 3-dimensional homogeneous spaces depending on the dimension of the group of isometries, which can be: 3, 4 or 6. In the case of dimension 6, M will be a space form; if the dimension of the group of isometries is 4, M will be isometric to: either \mathbb{H}_3 (Heisenberg's group), or $SU(2)$ (special unitary group), or $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ (universal covering of the special linear group), or the product spaces $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Except for \mathbb{H}^3 , in the case of dimension 4 or 6 the homogeneous space is locally isometric to (a part of) \mathbb{R}^3 , endowed with a metric that depends on two real parameters. Such family of metrics first appears in the work [3] of L. Bianchi and later in the articles [14, 35] of É. Cartan and G. Vranceanu, respectively.

In this master thesis, we want to study (essentially) results of existence and classification of bi-harmonic submanifolds in these spaces, also known as Bianchi-Cartan-Vranceanu's manifolds.

Conteúdo

Introdução	1
1 Bi-harmonicidade em geometria Riemanniana	5
1.1 Preliminares e notações	5
1.1.1 O operador de Beltrami-Laplace em variedades Riemannianas	6
1.2 Definição de aplicação harmônica	7
1.3 Aplicações bi-harmônicas	12
1.3.1 A fórmula da primeira variação	12
1.4 Condição de bi-harmonicidade para curvas	16
1.4.1 A equação bi-harmônica em coordenadas locais	17
2 Estudo das curvas bi-harmônicas com o método de Euler-Lagrange	19
2.1 Equivalência dos dois métodos	20
3 Curvas bi-harmônicas próprias em uma variedade Riemanniana	31
3.1 Estudo das curvas bi-harmônicas em uma superfície	33
3.2 Curvas bi-harmônicas em superfícies de revolução de \mathbb{R}^3	33
3.2.1 Exemplos de curvas bi-harmônicas em uma superfície de revolução com curvatura Gaussiana não constante	36
3.2.2 Curvas bi-harmônicas em superfícies de revolução com curvatura Gaussiana constante	40
4 Classificação das curvas bi-harmônicas dos BCV-espacos	43
4.1 Espaços de Bianchi-Cartan-Vranceanu e sua estrutura Riemanniana	43
4.2 Condições para curvas bi-harmônicas em $(M, g_{\ell, m})$	45
4.3 Equações explícitas das curvas bi-harmônicas em $(M, g_{\ell, m})$ com $\ell^2 \neq 4m$ e $m \neq 0$	47

4.4	Equações explícitas das curvas bi-harmônicas próprias em \mathbb{H}_3	54
4.5	Curvas bi-harmônicas próprias da esfera \mathbb{S}^3	57
5	Superfícies bi-harmônicas em forma espaciais	63
5.1	Resultados preliminares na esfera \mathbb{S}^n	63
5.2	Superfícies bi-harmônicas da esfera \mathbb{S}^3	65

Introdução

Indicaremos por $C^\infty(M, N)$ o espaço das aplicações diferenciáveis entre duas variedades Riemannianas M e N . Uma função $f \in C^\infty(M, N)$, com M compacta, é dita *harmônica* se é um ponto crítico do *funcional energia*:

$$E : C^\infty(M, N) \rightarrow \mathbb{R}, \quad E(f) = \frac{1}{2} \int_M \|df\|^2 dM,$$

ou seja ([22]), se f é uma solução da correspondente equação de Euler-Lagrange dada por

$$\tau(f) = \text{tr } \tilde{\nabla} df = 0, \quad (1)$$

onde $\tau(f)$ é o *campo de tensão* de f e $\tilde{\nabla}$ denota a conexão Riemanniana do fibrado $T^*M \otimes f^{-1}TN$.

A equação (1) é conhecida como *equação harmônica* e, em coordenadas locais $\{x_i\}$ em M e $\{y_\alpha\}$ em N , assume a forma:

$$\tau(f) = \left(-\Delta^M f_\alpha + g^{ij} {}^N\Gamma_{\beta\delta}^\alpha \frac{\partial f_\beta}{\partial x_i} \frac{\partial f_\delta}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \circ f = 0,$$

onde ${}^N\Gamma_{\beta\delta}^\alpha$ são os símbolos de Christoffel de (N, h) e Δ^M o operador de Beltrami-Laplace em (M, g) .

Exemplo 0.0.1. Seja $N = \mathbb{R}^n$ munido da métrica canônica e $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável, $f = (f_1, \dots, f_n)$. Como $\Gamma_{\beta\delta}^\alpha = 0$, então f é harmônica se, e somente se, $\Delta^M f_\alpha = 0$, $\alpha = 1, \dots, n$.

Exemplo 0.0.2 (Geodésicas). Uma aplicação $f : (a, b) \rightarrow (N^n, h)$ é harmônica se, e somente, se

$$\frac{d^2 f_\alpha}{dt^2} + \Gamma_{\beta\delta}^\alpha \frac{df_\beta}{dt} \frac{df_\delta}{dt} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, n,$$

ou seja, se e somente se f é uma geodésica.

As aplicações bi-harmônicas generalizam o conceito de aplicação harmônica (como sugerido por J. Eells e J.H. Sampson em [22]) e são definidas como pontos críticos do funcional bi-energia:

$$E_2 : C^\infty(M, N) \rightarrow \mathbb{R}, \quad E_2(f) = \frac{1}{2} \int_M \|\tau(f)\|^2 dM.$$

Em [26, 27] G.Y. Jiang obteve a fórmula da primeira variação da bi-energia provando que a equação de Euler-Lagrange para E_2 é dada por

$$\tau_2(f) = -\Delta\tau(f) + \text{tr } R^N(df, \tau(f)) df = 0, \quad (2)$$

onde, denotando por $\bar{\nabla}$ a conexão no fibrado $f^{-1}TN$, $\Delta = -\text{tr}(\bar{\nabla}\bar{\nabla} - \bar{\nabla}_{\nabla'})$ é o Laplaciano definido nas seções de $f^{-1}TN$ e $R^N(X, Y) = \nabla'_Y \nabla'_X - \nabla'_X \nabla'_Y + \nabla'_{[X, Y]}$ é o operador de curvatura em TN , definido através da conexão desse fibrado ∇' . A equação (2) é chamada de *equação bi-harmônica*.

Da expressão do *campo de bi-tensão* τ_2 segue que toda aplicação harmônica (i.e. $\tau = 0$) é também bi-harmônica. Uma aplicação bi-harmônica que não é harmônica é chamada de *aplicação bi-harmônica própria*.

O estudo das funções bi-harmônicas teve início em 1863 devido a sua ligação com a teoria da elasticidade e com a mecânica dos fluidos; G.B. Airy e J.C. Maxwell foram os primeiros a usar tal tipo de funções para descrever um modelo matemático de elasticidade (veja [1, 29]). Já a teoria das funções poli-harmônicas se desenvolveu mais tarde por obra de E. Almansi, T. Levi-Civita e M. Nicolaescu. Recentemente, R. Caddeo e L. Vanhecke ([13]), L. Sario, M. Nakai, C. Wang e L. Chung (veja [33]), entre outros, começaram o estudo das funções harmônicas e poli-harmônicas em variedades Riemannianas.

Na última década o estudo das aplicações e das imersões bi-harmônicas tem gerado nos pesquisadores um interesse crescente como demonstra a lista das publicações sobre o assunto presente no site “<http://people.unica.it/biharmonic/>”, de autoria de E. Loubeau, S. Montaldo e C. Oniciuc.

Neste trabalho são apresentados alguns resultados importantes sobre a teoria das subvariedades bi-harmônicas (ou seja, das subvariedades tais que a inclusão é uma aplicação bi-harmônica) de espaços homogêneos tridimensionais.

Existem três classes de espaços homogêneos tridimensionais simplesmente conexos dependendo da dimensão do grupo de isometrias, que pode ser: 3, 4 ou 6. No caso da dimensão ser

6, M é uma forma espacial; se a dimensão do grupo de isometrias for 4, M é isométrica a: \mathbb{H}_3 (grupo de Heisenberg tridimensional), $SU(2)$ (grupo unitário especial), $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ (revestimento universal do grupo linear especial), ou aos espaços produtos $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ ou $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Feita exceção para o espaço hiperbólico tridimensional \mathbb{H}^3 , no caso da dimensão ser 4 ou 6 o espaço homogêneo é localmente isométrico a (uma parte de) \mathbb{R}^3 , munido de uma métrica que depende de dois parâmetros reais. Tal família de métricas aparece primeiramente no trabalho [3] de L. Bianchi e, mais tarde, nos artigos [14, 35] de É. Cartan e G. Vranceanu, respectivamente.

Este trabalho se encaixa nesta linha, com ênfase no estudo de resultados de existência e classificação de subvariedades bi-harmônicas nas variedades de Bianchi-Cartan-Vranceanu (ou BCV-espacos).

No Capítulo 1 damos a definição de aplicações bi-harmônicas entre variedades Riemannianas como generalização natural do conceito de aplicação harmônica. Também, provaremos a fórmula da primeira variação da energia (dada em [31]) e da bi-energia (dada em [27]).

No Capítulo 2 apresentamos o método de Euler-Lagrange, que faz uso de uma bi-lagrangiana, para o estudo de curvas bi-harmônicas e que resulta em um sistema de equações diferenciais ordinárias. Em seguida é demonstrada a equivalência entre a equação bi-harmônica e o sistema de equações diferenciais ordinárias obtido no presente capítulo, assim como foi feito por R. Caddeo, S. Montaldo, C. Oniciuc e P. Piu em [10]. Por fim aplicamos o método de Euler-Lagrange para determinar as curvas bi-harmônicas do plano hiperbólico e do grupo de Lie Sol.

O Capítulo 3 é resultado do estudo do artigo [11], onde é feita a discussão sobre as curvas bi-harmônicas em superfícies. Começamos considerando o caso geral, de uma superfície qualquer, depois nos restringimos às superfícies de revolução do espaço Euclidiano tridimensional. São, então, descritas curvas bi-harmônicas de algumas superfícies como o toro de revolução, as superfícies de Delaunay e o elipsóide de revolução e, também, damos a solução explícita da equação bi-harmônica para o caso de superfícies de revolução com curvatura Gaussiana constante positiva.

Já no Capítulo 4 damos a classificação completa de curvas bi-harmônicas nas 3-variedades de Bianchi-Cartan-Vranceanu $(M, g_{\ell, m})$, que são definidas como sendo (uma parte de) \mathbb{R}^3 com uma métrica dependente de dois parâmetros reais ℓ, m . No início apresentamos tais espaços e sua estrutura Riemanniana, e obtemos condições para as curvas bi-harmônicas nestes espaços. Depois fazemos um estudo específico, começando com o caso $\ell^2 \neq 4m$ e $m \neq 0$ (ou seja, os

espaços $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, $SU(2)$ e $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$) seguindo o que fizeram R. Caddeo, S. Montaldo, C. Oniciuc e P. Piu em [9]. Depois analisamos o caso $\ell = 1$ e $m = 0$ (i.e. o espaço de Heisenberg \mathbb{H}_3) que foi estudado em [12]. Por fim, consideramos o caso de \mathbb{S}^3 (i.e. $\ell^2 = 4m \neq 0$) estudado em [8]. Em cada um desses casos expomos as equações explícitas das curvas bi-harmônicas.

O Capítulo 5 finaliza este texto e é dedicado ao estudo de superfícies bi-harmônicas próprias das formas espaciais tridimensionais (veja [8]). A inexistência de tais superfícies em formas espaciais com curvatura seccional $c \leq 0$, nos leva a nos restringirmos ao caso da esfera \mathbb{S}^3 , para qual demonstramos que as superfícies bi-harmônicas próprias são hiperesferas de raio $1/\sqrt{2}$.

Capítulo 1

Bi-harmonicidade em geometria Riemanniana

O presente capítulo tem como fim introduzir o conceito de aplicação bi-harmônica entre duas variedades Riemannianas, de forma tal que o mesmo apareça como generalização natural da noção de aplicação harmônica. Primeiramente definiremos aplicações harmônicas $f : (M, g) \rightarrow (N, h)$ entre variedades Riemannianas como ponto crítico do funcional energia, provando (veja Teorema 1.2.3) que a correspondente equação de Euler-Lagrange é $\tau(f) = 0$ (onde $\tau(f)$ denota o campo de tensão de f). Em seguida, veremos que a aplicação f é dita bi-harmônica se é ponto crítico do funcional bi-energia. Neste caso a correspondente equação de Euler-Lagrange foi descrita por G.Y. Jiang em [27] e é dada por $\tau_2(f) = 0$ (onde $\tau_2(f)$ denota o campo de bi-tensão de f).

1.1 Preliminares e notações

Seja $f : (M, g) \rightarrow (N, h)$ uma aplicação C^∞ . Usaremos os símbolos ∇ , ∇' , $\bar{\nabla}$ e $\tilde{\nabla}$ para as conexões Riemannianas nos fibrados TM , TN , $f^{-1}TN = \bigcup_{p \in M} T_{f(p)}N$ e $T^*M \otimes f^{-1}TN$, respectivamente. De forma que, por definição (ver, por exemplo, [34] e [21]), temos:

$$\bar{\nabla}_X V = \nabla'_{df(X)} V \quad \text{e} \quad (\tilde{\nabla} df)(X, Y) = (\tilde{\nabla}_X df)(Y) = \bar{\nabla}_X df(Y) - df(\nabla_X Y),$$

onde $X, Y \in \Gamma(TM)$ e

$$V \in \Gamma(f^{-1}TN) = \{W \mid W : M \rightarrow TN \text{ é uma aplicação } C^\infty, W(p) \in T_{f(p)}N, p \in M\}.$$

Além disso, o tensor curvatura \tilde{R} no fibrado $T^*M \otimes f^{-1}TN$ é definido como segue

$$\tilde{R}(X, Y) = \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X - \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y + \tilde{\nabla}_{[X, Y]}, \quad X, Y \in \Gamma(TM). \quad (1.1)$$

Portanto, para qualquer $Z \in \Gamma(TM)$, definimos

$$\begin{aligned} (\tilde{R}(X, Y)df)(Z) &= R^{f^{-1}TN}(X, Y)df(Z) - df(R^M(X, Y)Z) \\ &= R^N(df(X), df(Y))df(Z) - df(R^M(X, Y)Z), \end{aligned} \quad (1.2)$$

onde R^M , R^N e $R^{f^{-1}TN}$ são os tensores de curvatura em TM , TN e $f^{-1}TN$, respectivamente.

1.1.1 O operador de Beltrami-Laplace em variedades Riemannianas

Consideremos (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão m e $(U, \{x_i\})$ um sistema de coordenadas locais. Denotamos por $g = \det(g_{ik})$, sendo

$$(g_{ik}) = \left(g \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \right)$$

a matriz associada à métrica g .

Definição 1.1.1. *Seja $f \in C^\infty(M)$ e $X = X_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \Gamma(TM)$, definimos o gradiente de f sobre (M, g) e a divergência de X como*

$$\text{grad } f = \sum_{i,k} g^{ik} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (1.3)$$

e

$$\text{div } X = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (X_i \sqrt{g}), \quad (1.4)$$

respectivamente.

Observação 1.1.2. Se considerarmos $\{e_k\}$ uma base local de campos ortonormais, uma expressão equivalente para a divergência (ver, por exemplo, [34]) é dada por

$$\text{div } X = \sum_k \langle \nabla_{e_k} X, e_k \rangle. \quad (1.5)$$

Por meio desses operadores, introduzimos na variedade (M, g) o operador de Beltrami-Laplace $\Delta^M : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ por

$$\Delta^M f = \text{div}(\text{grad } f),$$

que, em coordenadas locais, tem expressão

$$\Delta^M f = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(g^{ij} \sqrt{g} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right), \quad (1.6)$$

de onde se obtém (ver [34])

$$\begin{aligned} \Delta^M f &= \sum_{i,j,k} g^{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \\ &= \sum_i \{ e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i) f \}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Observação 1.1.3. Observe que se $\{e_i\}$ for um referencial (local) geodésico em $p \in M$, então

$$\begin{aligned} \text{grad } f(p) &= \sum_i (e_i(f)) e_i(p), \\ \text{div } X(p) &= \sum_i e_i(f_i)(p), \quad X = \sum_i f_i e_i, \\ \Delta^M f(p) &= \sum_i e_i(e_i(f))(p). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Exemplo 1.1.4. Se $M = \mathbb{R}^m$ com sua estrutura Riemanniana usual, então

$$\Delta^M f = \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}, \quad f \in C^\infty(M). \quad (1.9)$$

1.2 Definição de aplicação harmônica

Seja $C^\infty(M, N)$ o espaço das aplicações diferenciáveis $f : (M, g) \rightarrow (N, h)$ entre as duas variedades Riemannianas M e N . Se $f \in C^\infty(M, N)$, podemos ver a diferencial df como uma seção do fibrado $T^*M \otimes f^{-1}TN$ e então sua norma é dada por

$$\begin{aligned} \|df\|_p^2 &= \langle df, df \rangle_p = \sum_i \langle df_p(e_i), df_p(e_i) \rangle_{f(p)} \\ &= g^{ij}(p) f_\alpha^i(p) f_\beta^j(p) h_{\alpha\beta}(f(p)), \end{aligned} \quad (1.10)$$

onde $\{e_i\}_{i=1,\dots,m}$ é uma base ortonormal de T_pM . A norma $\|df\|_p$ é conhecida como norma de *Hilbert-Schmidt* da aplicação linear df_p .

Definição 1.2.1. A densidade de energia de uma aplicação $f \in C^\infty(M, N)$ é a função $e(f) = \frac{1}{2} \|df\|^2$, e a energia de f é dada por $E(f) = \int_M e(f) dM$.

Definição 1.2.2. Uma aplicação $f \in C^\infty(M, N)$ é dita harmônica se é um ponto crítico do funcional energia $E : C^\infty(M, N) \rightarrow \mathbb{R}$ ou seja, se para toda variação suave de f , $\{f_t\}$, com $-\epsilon < t < \epsilon$, temos

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} E(f_t) = 0. \quad (1.11)$$

Neste contexto, ao dizermos variação suave $\{f_t\}$, queremos dizer que $f_0 = f$ e que a dependência de $\{f_t\}$ com respeito a t é de classe C^∞ ; ou seja, a aplicação

$$F : (-\epsilon, \epsilon) \times M \rightarrow N$$

definida por

$$F(t, p) := f_t(p), \quad -\epsilon < t < \epsilon, \quad p \in M,$$

satisfaz

$$\begin{cases} F(0, p) = f(p), & p \in M, \\ F : (-\epsilon, \epsilon) \times M \rightarrow N & \text{é uma aplicação } C^\infty. \end{cases} \quad (1.12)$$

Para cada variação suave $\{f_t\}$ de f , $-\epsilon < t < \epsilon$, pondo

$$V(p) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f_t(p), \quad p \in M, \quad (1.13)$$

então V é uma aplicação C^∞ de M no fibrado tangente TN satisfazendo

$$V(p) \in T_{f(p)}N, \quad p \in M. \quad (1.14)$$

Reciprocamente, para cada aplicação C^∞ , $V : M \rightarrow TN$, satisfazendo (1.14), definindo

$$f_t(p) := \exp_{f(p)}(tV(p)), \quad p \in M,$$

resulta que $f_t \in C^\infty(M, N)$ e

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f_t(p) = V(p), \quad p \in M.$$

Tal campo de vetores V é chamado de *campo de vetores variacional ao longo de f* ¹.

¹Campos de vetores variacionais podem ser vistos como seções de algum fibrado sobre M , da maneira que passamos a explicar.

Seja $f^{-1}TN$ o fibrado sobre M , induzido por f a partir de TN e $\pi : TN \rightarrow N$ a projeção canônica. Então o conjunto de todas as seções C^∞ de $f^{-1}TN$, denotado por $\Gamma(f^{-1}TN)$, é o conjunto de todos os campos de vetores variacionais:

$$\Gamma(f^{-1}TN) = \{V \mid V : M \rightarrow TN \text{ é uma aplicação } C^\infty \text{ e } V(p) \in T_{f(p)}N, p \in M\}.$$

Considere $F : I_\epsilon \times M \rightarrow N$, $I_\epsilon = (-\epsilon, \epsilon)$, a função induzida pela variação $\{f_t\}$, como em (1.12). Adotando a métrica Euclidiana usual em I_ϵ , com respeito à métrica Riemanniana produto em $I_\epsilon \times M$, denotaremos por ∇ , $\bar{\nabla}$, $\tilde{\nabla}$, as conexões Riemannianas induzidas em $T(I_\epsilon \times M)$, $F^{-1}TN$, $T^*(I_\epsilon \times M) \otimes F^{-1}TN$, respectivamente. Se $\{e_i\}$ for uma base ortonormal de campos definidos em uma vizinhança U de p , $\{\frac{\partial}{\partial t}, e_i\}$ será também uma base ortonormal de campos em uma vizinhança coordenada em $I_\epsilon \times U$, e vale

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial t} = 0, \quad \nabla_{e_i} e_j = \nabla_{e_i} e_j, \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} e_i = \nabla_{e_i} \frac{\partial}{\partial t} = 0. \quad (1.15)$$

Além disso, temos que

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} = \frac{\partial F_\alpha}{\partial t} \frac{\partial}{\partial y_\alpha} = dF\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \quad df_t(e_i) = dF(e_i) \quad (1.16)$$

e

$$\begin{aligned} (\tilde{\nabla}_{e_i} df_t)(e_j) &= \nabla'_{df_t(e_i)} df_t(e_j) - df_t(\nabla_{e_i} e_j) = (\tilde{\nabla}_{e_i} dF)(e_j), \\ (\tilde{\nabla}_{e_k} \tilde{\nabla}_{e_i} df_t)(e_j) &= \nabla'_{df_t(e_k)} ((\tilde{\nabla}_{e_i} df_t)(e_j)) - (\tilde{\nabla}_{e_i} df_t)(\nabla_{e_k} e_j) = (\tilde{\nabla}_{e_k} \tilde{\nabla}_{e_i} dF)(e_j), \end{aligned} \quad (1.17)$$

etc. Aqui usamos abreviadamente o símbolo $\tilde{\nabla}$ em $T^*M \otimes f_t^{-1}TN$ no qual omitimos t .

Vale o seguinte resultado:

Teorema 1.2.3 ([22]). *Uma aplicação $f : (M, g) \rightarrow (N, h)$ é harmônica se e somente se*

$$\tau(f) = \text{tr } \tilde{\nabla} df = 0.$$

Demonstração. Seja $\{f_t\}$ uma variação suave de f , definimos $F : I_\epsilon \times M \rightarrow N$ pondo $F(t, p) = f_t(p)$. Denotamos por V o campo variacional correspondente. A energia de f_t é dada por $E(f_t) = \int_M e(f_t) dM$, e então

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} E(f_t) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_M e(f_t) dM = \int_M \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} e(f_t) dM.$$

Seja $p \in M$ e considere um sistema de coordenadas normais $(U, \{x_i\})$ em M e seus correspondentes campos tangentes $\{e_i\}_{i=1, \dots, m}$ em p , de forma que $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ e $(\nabla_{e_i} e_i)(p) = 0$.

Como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_t e(f_t)(p) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \Big|_t \left\{ \sum_i \langle df_t(e_i), df_t(e_i) \rangle_p \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{(t,p)} \left\{ \sum_i \langle dF(e_i), dF(e_i) \rangle \right\} \\ &= \sum_i \langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} dF(e_i), dF(e_i) \rangle_{(t,p)} \end{aligned} \quad (1.18)$$

e vale

$$\bar{\nabla}_X(dF(Y)) - \bar{\nabla}_Y(dF(X)) - dF([X, Y]) = 0,$$

para todo $X, Y \in \Gamma(T(I_\epsilon \times M))$ (ver [34], Lema 1.16), temos

$$\frac{d}{dt}\Big|_t e(f_t)(p) = \sum_i \langle \bar{\nabla}_{e_i} dF\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) + dF\left(\left[\frac{\partial}{\partial t}, e_i\right]\right), dF(e_i)\rangle_{(t,p)}. \quad (1.19)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e(f_t)(p) &= \sum_i \langle \bar{\nabla}_{e_i} V, df(e_i)\rangle_p \\ &= \sum_i \{e_i \langle V, df(e_i)\rangle_p - \langle V, \bar{\nabla}_{e_i} df(e_i)\rangle_p\}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Seja $q \in M$ e $\{Y_i\}_{i=1, \dots, m}$ uma base ortonormal de $T_q M$. Definimos o campo de vetores

$$X(q) = \sum_i \langle V, df(Y_i)\rangle_q Y_i \in T_q M.$$

Tal campo está bem definido, no sentido de que não depende da escolha da base ortonormal $\{Y_i\}$. Ao variar q em M , obtemos $X \in \Gamma(TM)$ e, então, pela fórmula (1.8), temos que

$$(\operatorname{div} X)(p) = \sum_{i=1}^m e_i \langle V, df(e_i)\rangle(p). \quad (1.21)$$

Substituindo (1.21) em (1.20) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e(f_t)(p) &= (\operatorname{div} X)(p) - \left\langle V, \sum_i \tilde{\nabla} df(e_i, e_i) \right\rangle_p \\ &= (\operatorname{div} X)(p) - \langle V, \tau(f)\rangle_p. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Da integração de (1.22), resulta

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} E(f_t) = - \int_M \langle V, \tau(f)\rangle dM. \quad (1.23)$$

O resultado segue devido à arbitrariedade de V . □

A equação $\tau(f) = 0$ é dita *equação harmônica*. Vamos agora escrever $\tau(f)$ em coordenadas locais $\{x_i\}$ em M e $\{y_\alpha\}$ em N . Temos que:

$$\tau(f) = \operatorname{tr} \tilde{\nabla} df = g^{ij} (\tilde{\nabla} df) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right), \quad (1.24)$$

onde

$$\begin{aligned}
(\tilde{\nabla} df)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) &= \left(\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} df\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) \\
&= \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} df\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) - df\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \\
&= \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \circ f\right)\right) - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_k} \left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \circ f\right) \\
&= \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial x_i \partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \circ f\right) + \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_j} \frac{\partial f_\beta}{\partial x_i} \left(\nabla'_{\frac{\partial}{\partial y_\beta}} \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \circ f\right) - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_k} \left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \circ f\right) \\
&= \left(\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial x_i \partial x_j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_k} + {}^N \Gamma_{\beta\sigma}^\alpha \frac{\partial f_\sigma}{\partial x_j} \frac{\partial f_\beta}{\partial x_i}\right) \left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \circ f\right).
\end{aligned}$$

Portanto, usando (1.7), resulta

$$\tau(f) = \left(\Delta^M f_\alpha + g^{ijN} \Gamma_{\beta\sigma}^\alpha \frac{\partial f_\sigma}{\partial x_j} \frac{\partial f_\beta}{\partial x_i}\right) \left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \circ f\right), \quad (1.25)$$

onde Δ^M é o operador de Beltrami-Laplace em (M, g) .

Exemplo 1.2.4. Seja $f : (M, g) \rightarrow (N, h)$ uma aplicação constante, ou seja, $f(p) = q$ para todo $p \in M$. Então $\tau(f) = 0$.

Exemplo 1.2.5 (Geodésicas). Uma curva $f : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow (N, h)$ é uma aplicação harmônica se e somente se é geodésica, ou seja

$$\frac{d^2 f_\alpha}{dt^2} + \Gamma_{\beta\delta}^\alpha \frac{df_\beta}{dt} \frac{df_\delta}{dt} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, n.$$

Exemplo 1.2.6 (Imersões mínimas). Seja $f : (M, g) \rightarrow (N, h)$ uma imersão isométrica, i.e., $f^*h = g$. Identificando $X \in \Gamma(TM)$ com $df(X) \in \Gamma(f^{-1}TN)$, vemos que a segunda forma fundamental II pode ser escrita como

$$\text{II}(X, Y) = \nabla'_X Y - \nabla_X Y = \tilde{\nabla} df(X, Y).$$

Então, pela definição do vetor curvatura média H de f , temos

$$\tau(f) = \text{tr } \tilde{\nabla} df = m H.$$

Portanto, f é harmônica se e somente se é minimal.

Exemplo 1.2.7. A aplicação identidade $\mathbf{1} : (M, g) \rightarrow (M, g)$ é harmônica.

1.3 Aplicações bi-harmônicas

Em [22] J. Eells e J. H. Sampson generalizaram o conceito de aplicações harmônicas introduzindo a noção de aplicações k -harmônicas. Nesta seção apresentaremos os principais resultados dados por G.Y. Jiang em [27] provando a fórmula da primeira variação das aplicações bi-harmônicas (i.e. $k = 2$).

Nos cálculos que seguem omitiremos o símbolo de somatório para que a notação fique mais leve.

Na Seção 1.2 definimos o funcional energia e escrevemos sua correspondente equação de Euler-Lagrange chegando, dessa forma, à condição de harmonicidade para uma aplicação $f \in C^\infty(M, N)$. Para esta aplicação, definimos o funcional bi-energia, pondo

$$E_2(f) = \frac{1}{2} \int_M \|\tau(f)\|^2 dM, \quad (1.26)$$

onde $\tau(f)$ é o campo de tensão da aplicação f . Podemos agora dar a seguinte

Definição 1.3.1. *Seja $f : (M, g) \rightarrow (N, h)$ uma aplicação C^∞ , entre variedades Riemannianas quaisquer. Dizemos que f é uma aplicação bi-harmônica se é um ponto crítico do funcional bi-energia em $C^\infty(M, N)$, i.e., se para toda variação suave de f , $\{f_t\} \in C^\infty(M, N)$ com $-\epsilon < t < \epsilon$, temos*

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} E_2(f_t) = 0. \quad (1.27)$$

1.3.1 A fórmula da primeira variação

No que segue, provaremos dois lemas que serão úteis no cálculo da primeira variação de E_2 , para isso usaremos as notações dadas na Seção 1.2.

Lema 1.3.2 ([27]). *Para qualquer variação C^∞ , $\{f_t\}$ de f , vale*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_2(f_t) &= \int_M \left\langle (\tilde{\nabla}_{e_i} \tilde{\nabla}_{e_i} dF) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) - (\tilde{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i} dF) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right), (\tilde{\nabla}_{e_j} dF)(e_j) \right\rangle dM \\ &\quad + \int_M \left\langle \mathbb{R}^N \left(dF(e_i), dF \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right) dF(e_i), (\tilde{\nabla}_{e_j} dF)(e_j) \right\rangle dM. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Demonstração. Sendo $\{e_i\}$ uma base ortonormal local, a equação (1.26) pode ser reescrita como

$$2E_2(f) = \int_M \|\tau(f)\|^2 dM = \int_M \langle (\tilde{\nabla}_{e_i} df)(e_i), (\tilde{\nabla}_{e_j} df)(e_j) \rangle dM. \quad (1.29)$$

Devido a (1.17), para uma variação $\{f_t\}$ de f , vale que

$$\begin{aligned} 2\frac{d}{dt}E_2(f_t) &= \frac{d}{dt} \int_M \langle (\tilde{\nabla}_{e_i} dF)(e_i), (\tilde{\nabla}_{e_j} dF)(e_j) \rangle dM \\ &= 2 \int_M \langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} ((\tilde{\nabla}_{e_i} dF)(e_i)), (\tilde{\nabla}_{e_j} dF)(e_j) \rangle dM. \end{aligned} \quad (1.30)$$

De (1.15) e usando o tensor curvatura em $T^*(I_\epsilon \times M) \otimes F^{-1}TN$, temos

$$\begin{aligned} \left(\tilde{\mathbf{R}} \left(X, \frac{\partial}{\partial t} \right) dF \right) (Y) &= \mathbf{R}^N \left(dF(X), dF \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right) dF(Y) \\ &\quad - dF \left(\mathbf{R}^{M \times I_\epsilon} \left(X, \frac{\partial}{\partial t} \right) Y \right) \\ &= \mathbf{R}^N \left(dF(X), dF \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right) dF(Y), \end{aligned} \quad (1.31)$$

para todo $X, Y \in \Gamma(T(I_\epsilon \times M))$. Além disso, como

$$\bar{\nabla}_X(dF(Y)) - \bar{\nabla}_Y(dF(X)) - dF([X, Y]) = 0,$$

para todo $X, Y \in \Gamma(T(I_\epsilon \times M))$, temos

$$\begin{aligned} (\tilde{\nabla}_{e_i} dF) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) &= \bar{\nabla}_{e_i} \left(dF \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right) - dF \left(\nabla_{e_i} \frac{\partial}{\partial t} \right) \\ &= \bar{\nabla}_{e_i} \left(dF \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right) \\ &= \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} (dF(e_i)) + dF([e_i, \frac{\partial}{\partial t}]) \\ &= \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} (dF(e_i)) \\ &= \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} (dF(e_i)) - dF \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} e_i \right) \\ &= (\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} dF)(e_i) \end{aligned}$$

e, de forma análoga,

$$(\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} dF)(\nabla_{e_i} e_i) = (\tilde{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i} dF) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right).$$

Agora podemos trocar a ordem das diferenciações em $\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} ((\tilde{\nabla}_{e_i} dF)(e_i))$:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} ((\tilde{\nabla}_{e_i} dF)(e_i)) &= \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} ((\tilde{\nabla}_{e_i} dF)(e_i)) + (\tilde{\nabla}_{e_i} dF) \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} e_i \right) \\ &= (\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \tilde{\nabla}_{e_i} dF)(e_i) \\ &= \left(\tilde{\nabla}_{e_i} \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} dF - \tilde{\nabla}_{[e_i, \frac{\partial}{\partial t}]} dF + \tilde{\mathbf{R}} \left(e_i, \frac{\partial}{\partial t} \right) dF \right) (e_i) \\ &= \bar{\nabla}_{e_i} ((\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} dF)(e_i)) - (\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} dF)(\nabla_{e_i} e_i) \\ &\quad + \mathbf{R}^N \left(dF(e_i), dF \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right) dF(e_i) \\ &= \bar{\nabla}_{e_i} \left((\tilde{\nabla}_{e_i} dF) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right) - (\tilde{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i} dF) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \\ &\quad + \mathbf{R}^N \left(dF(e_i), dF \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right) dF(e_i) \\ &= (\tilde{\nabla}_{e_i} \tilde{\nabla}_{e_i} dF) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) - (\tilde{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i} dF) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \\ &\quad + \mathbf{R}^N \left(dF(e_i), dF \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right) dF(e_i). \end{aligned} \quad (1.32)$$

O resultado segue ao substituírmos (1.32) em (1.30). \square

Lema 1.3.3 ([27]). *Seguindo a notação acima e supondo que M seja compacta, vale*

$$\begin{aligned} & \int_M \left\langle (\tilde{\nabla}_{e_i} \tilde{\nabla}_{e_i} dF) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) - (\tilde{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i} dF) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right), (\tilde{\nabla}_{e_j} dF)(e_j) \right\rangle dM \\ &= \int_M \left\langle dF \left(\frac{\partial}{\partial t} \right), \bar{\nabla}_{e_k} \bar{\nabla}_{e_k} ((\tilde{\nabla}_{e_j} dF)(e_j)) - \bar{\nabla}_{\nabla_{e_k} e_k} ((\tilde{\nabla}_{e_j} dF)(e_j)) \right\rangle dM. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Demonstração. Para cada $t \in I_\epsilon$, definimos um campo de vetores C^∞ sobre M , pondo

$$X = \left\langle (\tilde{\nabla}_{e_i} dF) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right), (\tilde{\nabla}_{e_j} dF)(e_j) \right\rangle e_i, \quad (1.34)$$

o qual está bem definido devido a sua independência com respeito à escolha da base $\{e_i\}$. De (1.5), resulta que

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X &= \langle \nabla_{e_k} X, e_k \rangle_M = e_i \left(\left\langle (\tilde{\nabla}_{e_i} dF) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right), (\tilde{\nabla}_{e_j} dF)(e_j) \right\rangle \right) \\ &+ \left\langle (\tilde{\nabla}_{e_i} dF) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right), (\tilde{\nabla}_{e_j} dF)(e_j) \right\rangle \langle \nabla_{e_k} e_i, e_k \rangle_M. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Utilizando (1.15) e observando que

$$\langle \nabla_{e_k} e_i, e_k \rangle_M + \langle e_i, \nabla_{e_k} e_k \rangle_M = 0, \quad (1.36)$$

obtemos:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X &= \left\langle \bar{\nabla}_{e_i} (\tilde{\nabla}_{e_i} dF) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right), (\tilde{\nabla}_{e_j} dF)(e_j) \right\rangle + \left\langle (\tilde{\nabla}_{e_i} dF) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right), \bar{\nabla}_{e_i} ((\tilde{\nabla}_{e_j} dF)(e_j)) \right\rangle \\ &- \left\langle (\tilde{\nabla}_{e_i} dF) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right), (\tilde{\nabla}_{e_j} dF)(e_j) \right\rangle \langle e_i, \nabla_{e_k} e_k \rangle_M \\ &= \left\langle (\tilde{\nabla}_{e_i} \tilde{\nabla}_{e_i} dF) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) + (\tilde{\nabla}_{e_i} dF) \left(\nabla_{e_i} \frac{\partial}{\partial t} \right), (\tilde{\nabla}_{e_j} dF)(e_j) \right\rangle \\ &+ \left\langle (\tilde{\nabla}_{e_i} dF) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right), \bar{\nabla}_{e_i} ((\tilde{\nabla}_{e_j} dF)(e_j)) \right\rangle - \left\langle (\tilde{\nabla}_{\langle e_i, \nabla_{e_k} e_k \rangle_M e_i} dF) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right), (\tilde{\nabla}_{e_j} dF)(e_j) \right\rangle \\ &= \left\langle (\tilde{\nabla}_{e_i} \tilde{\nabla}_{e_i} dF) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right), (\tilde{\nabla}_{e_j} dF)(e_j) \right\rangle + \left\langle (\tilde{\nabla}_{e_i} dF) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right), \bar{\nabla}_{e_i} ((\tilde{\nabla}_{e_j} dF)(e_j)) \right\rangle \\ &- \left\langle (\tilde{\nabla}_{\nabla_{e_k} e_k} dF) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right), (\tilde{\nabla}_{e_j} dF)(e_j) \right\rangle. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Também definimos um campo de vetores C^∞ sobre M pondo

$$Y = \left\langle dF \left(\frac{\partial}{\partial t} \right), \bar{\nabla}_{e_i} ((\tilde{\nabla}_{e_j} dF)(e_j)) \right\rangle e_i. \quad (1.38)$$

Observe que Y está bem definido e que

$$\begin{aligned} \operatorname{div} Y &= \langle \nabla_{e_k} Y, e_k \rangle_M \\ &= \left\langle \left(\tilde{\nabla}_{e_k} dF \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right), \tilde{\nabla}_{e_k} \left(\left(\tilde{\nabla}_{e_j} dF \right) (e_j) \right) \right\rangle + \left\langle dF \left(\frac{\partial}{\partial t} \right), \tilde{\nabla}_{e_k} \tilde{\nabla}_{e_k} \left(\left(\tilde{\nabla}_{e_j} dF \right) (e_j) \right) \right\rangle \\ &\quad - \left\langle dF \left(\frac{\partial}{\partial t} \right), \tilde{\nabla}_{\nabla_{e_k} e_k} \left(\left(\tilde{\nabla}_{e_j} dF \right) (e_j) \right) \right\rangle. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Pelo Teorema de Green, temos

$$\int_M \operatorname{div}(X - Y) dM = 0, \quad (1.40)$$

e então, juntando (1.37) e (1.39) à equação (1.40), chegamos à equação (1.33). \square

Agora estamos prontos para determinar a primeira variação de E_2 .

Teorema 1.3.4. *Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação C^∞ de uma variedade Riemanniana compacta M , em uma variedade Riemanniana qualquer N . Seja $\{f_t\}$ uma variação C^∞ que gera o campo de vetores V . Então,*

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} E_2(f_t) = \int_M \langle V, \tilde{\nabla}_{e_i} \tilde{\nabla}_{e_i} \tau(f) - \tilde{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i} \tau(f) + \mathbb{R}^N(df(e_i), \tau(f)) df(e_i) \rangle dM. \quad (1.41)$$

Demonstração. Substituindo (1.33) em (1.28), temos a expressão

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} E_2(f_t) &= \int_M \left\langle dF \left(\frac{\partial}{\partial t} \right), \tilde{\nabla}_{e_k} \tilde{\nabla}_{e_k} \left(\left(\tilde{\nabla}_{e_j} dF \right) (e_j) \right) - \tilde{\nabla}_{\nabla_{e_k} e_k} \left(\left(\tilde{\nabla}_{e_j} dF \right) (e_j) \right) \right\rangle dM \\ &\quad + \int_M \left\langle \mathbb{R}^N \left(dF(e_i), dF \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right) dF(e_i), \left(\tilde{\nabla}_{e_j} dF \right) (e_j) \right\rangle dM. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Fazendo a substituição

$$\begin{aligned} &\left\langle \mathbb{R}^N \left(dF(e_i), dF \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right) dF(e_i), \left(\tilde{\nabla}_{e_j} dF \right) (e_j) \right\rangle \\ &= \left\langle \mathbb{R}^N \left(dF(e_i), \left(\tilde{\nabla}_{e_j} dF \right) (e_j) \right) dF(e_i), dF \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right\rangle, \end{aligned} \quad (1.43)$$

pondo $t = 0$ e utilizando (1.13), (1.16) e (1.17), obtemos a equação desejada. \square

Observação 1.3.5. Nos argumentos acima foi utilizada a hipótese de que M é uma variedade Riemanniana compacta sem bordo. Para uma variedade Riemanniana qualquer M , seja $D \subset M$ um domínio limitado arbitrário com fronteira suave, e tome uma variação $\{f_t\}$ de f satisfazendo

$$\left. \frac{\partial f_t}{\partial t} \right|_{\partial D} = 0, \quad \left(\tilde{\nabla}_{e_i} \frac{\partial f_t}{\partial t} \right) \Big|_{\partial D} = 0.$$

Então, no Lema 1.3.3, obtemos (1.33) ao aplicarmos o Teorema da divergência de Green a X e Y . Logo, temos a fórmula da primeira variação em D como sendo

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} E_2(f_t, D) = \int_D \langle V, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} \tau(f) - \bar{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i} \tau(f) + \mathbf{R}^N(df(e_i), \tau(f)) df(e_i) \rangle dM,$$

onde $E_2(f_t, D)$ é o correspondente funcional relativo a D .

Observação 1.3.6. Cabe aqui ressaltar que, devido a arbitrariedade do campo V , a condição analítica que obtemos para aplicações bi-harmonicas é

$$\bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} \tau(f) - \bar{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i} \tau(f) + \mathbf{R}^N(df(e_i), \tau(f)) df(e_i) = 0. \quad (1.44)$$

Então, de forma natural, damos a definição que segue.

Definição 1.3.7. *Seja $f \in C^\infty(M, N)$. Chamamos de campo de bi-tensão de f o campo*

$$\tau_2(f) = -\Delta_f(\tau(f)) + \mathbf{R}_f(\tau(f)),$$

onde

$$\Delta_f(\tau(f)) = -\left(\bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} - \bar{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i} \right) (\tau(f)) \quad (1.45)$$

é o Laplaciano generalizado, enquanto

$$\mathbf{R}_f(\tau(f)) = \mathbf{R}^N(df(e_i), \tau(f)) df(e_i).$$

Com estas notações, a equação bi-harmônica (1.44) se torna

$$\tau_2(f) = 0.$$

Da expressão de τ_2 segue que toda aplicação harmônica (i.e. $\tau = 0$) é também bi-harmônica. Uma aplicação bi-harmônica que não é harmônica é dita *aplicação bi-harmônica própria*.

1.4 Condição de bi-harmonicidade para curvas

Considere uma imersão isométrica $\gamma : I \rightarrow (M, g)$ de um intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ em uma variedade Riemanniana M . Supondo que γ esteja parametrizada pelo comprimento de arco, temos

$$e_1 = \frac{d}{dt} \quad \text{e} \quad d\gamma\left(\frac{d}{dt}\right) = \gamma'.$$

Como $\mathbb{R}\nabla_{\frac{d}{dt}} \frac{d}{dt} = 0$, a equação bi-harmônica se torna

$$\tau_2(\gamma) = \nabla_{\gamma'}^2 \tau(\gamma) + \mathbf{R}(\gamma', \tau(\gamma)) \gamma' = 0. \quad (1.46)$$

1.4.1 A equação bi-harmônica em coordenadas locais

Daremos à equação (1.46), a qual deve ser satisfeita pelas curvas bi-harmônicas de uma variedade Riemanniana n -dimensional M , uma representação em coordenadas locais. Sendo

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\gamma', \tau(\gamma))\gamma' &= \nabla_{[\gamma', \tau(\gamma)]}\gamma' - [\nabla_{\gamma'}, \nabla_{\tau(\gamma)}]\gamma' \\ &= \nabla_{(\nabla_{\gamma'}\tau(\gamma) - \nabla_{\tau(\gamma)}\gamma')}\gamma' - \nabla_{\gamma'}\nabla_{\tau(\gamma)}\gamma' + \nabla_{\tau(\gamma)}\nabla_{\gamma'}\gamma' \\ &= \nabla_{(\nabla_{\gamma'}\tau(\gamma))}\gamma' - \nabla_{(\nabla_{\tau(\gamma)}\gamma')}\gamma' - \nabla_{\gamma'}\nabla_{\tau(\gamma)}\gamma' + \nabla_{\tau(\gamma)}\nabla_{\gamma'}\gamma', \end{aligned}$$

substituindo em (1.46) resulta:

$$\begin{aligned} \tau_2(\gamma) &= \sum_{k=1}^n \left(\nabla_{\gamma'}^2 \tau(\gamma) + \mathbf{R}(\gamma', \tau(\gamma))\gamma' \right)_k \frac{\partial}{\partial x_k} \\ &= \sum_{k=1}^n \left[(\nabla_{\gamma'}^2 \tau(\gamma))_k + (\nabla_{(\nabla_{\gamma'}\tau(\gamma))}\gamma')_k - (\nabla_{(\nabla_{\tau(\gamma)}\gamma')}\gamma')_k - (\nabla_{\gamma'}\nabla_{\tau(\gamma)}\gamma')_k \right. \\ &\quad \left. + (\nabla_{\tau(\gamma)}\nabla_{\gamma'}\gamma')_k \right] \frac{\partial}{\partial x_k}. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Indicando por τ_l a l -ésima coordenada de $\tau(\gamma)$, valem as expressões:

$$\begin{aligned} (\nabla_{\gamma'}^2 \tau(\gamma))_k &= \frac{d}{dt} (\nabla_{\gamma'} \tau(\gamma))_k + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k (\nabla_{\gamma'} \tau(\gamma))_i \gamma'_j, \\ (\nabla_{(\nabla_{\gamma'}\tau(\gamma))}\gamma')_k &= \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k \gamma'_i (\nabla_{\gamma'} \tau(\gamma))_j, \\ (\nabla_{(\nabla_{\tau(\gamma)}\gamma')}\gamma')_k &= \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k \gamma'_i (\nabla_{\tau(\gamma)} \gamma')_j, \\ (\nabla_{\gamma'}\nabla_{\tau(\gamma)}\gamma')_k &= \frac{d}{dt} (\nabla_{\tau(\gamma)} \gamma')_k + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k (\nabla_{\tau(\gamma)} \gamma')_i \gamma'_j, \\ (\nabla_{\tau(\gamma)}\nabla_{\gamma'}\gamma')_k &= \sum_l^n \tau_l \frac{\partial \tau_k}{\partial x_l} + \sum_{i,j}^n \Gamma_{ij}^k \tau_i \tau_j, \end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned} \nabla_{\gamma'} \tau(\gamma) &= \sum_{k=1}^n \left[\frac{d}{dt} \tau_k + \sum_{i,j}^n \Gamma_{ij}^k \tau_i \gamma'_j \right] \frac{\partial}{\partial x_k}, \\ \nabla_{\tau(\gamma)} \gamma' &= \sum_{k=1}^n \left[\sum_{l=1}^n \tau_l \frac{\partial \gamma'_k}{\partial x_l} + \sum_{i,j}^n \Gamma_{ij}^k \gamma'_i \tau_j \right] \frac{\partial}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

Portanto, obtemos a expressão desejada:

$$\begin{aligned} (\tau_2(\gamma))_k &= \frac{d}{dt} (\nabla_{\gamma'} \tau(\gamma))_k + 2 \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k \gamma'_i (\nabla_{\gamma'} \tau(\gamma))_j - \frac{d}{dt} (\nabla_{\tau(\gamma)} \gamma')_k - 2 \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k \gamma'_i (\nabla_{\tau(\gamma)} \gamma')_j \\ &\quad + \sum_l^n \tau_l \frac{\partial \tau_k}{\partial x_l} + \sum_{i,j}^n \Gamma_{ij}^k \tau_i \tau_j. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Capítulo 2

Estudo das curvas bi-harmônicas com o método de Euler-Lagrange

O propósito deste capítulo é expor um método alternativo, ao obtido no Capítulo 1, para descrever as curvas bi-harmônicas de uma variedade Riemanniana.

Observe que no caso das curvas harmônicas (i.e. as geodésicas) vale o seguinte resultado:

Teorema 2.0.1. *Para o cálculo de geodésicas em uma variedade Riemanniana (M^n, g) , os seguintes sistemas são equivalentes:*

$$x_k'' + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k x_i' x_j' = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.1)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial x_k'} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_k} = 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad (2.2)$$

Aqui

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n g_{ij} x_i' x_j'$$

é a Lagrangiana nas coordenadas locais $\{x_i\}$ de M .

Demonstração. Como

$$L(x(t), x'(t)) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} g_{ij}(x(t)) x_i' x_j',$$

então

$$\frac{\partial L}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} x_i' x_j', \quad \frac{\partial L}{\partial x_k'} = \sum_{i=1}^n g_{ki} x_i'$$

e

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial x'_k} \right) = \sum_{i=1}^n g_{ki} x''_i + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} x'_i x'_j.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial x'_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_k} &= \sum_{i=1}^n g_{ki} x''_i + \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right) x'_i x'_j \\ &= \sum_{i=1}^n g_{ki} x''_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right) x'_i x'_j \\ &= \sum_{i=1}^n g_{ki} x''_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right) x'_i x'_j. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Usando a condição de que a expressão acima deve se anular e multiplicando por g^{ik} , obtemos

$$x''_k + \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{lk} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right) x'_i x'_j = 0.$$

O resultado segue da expressão dos símbolos de Christoffel. \square

Motivados por este resultado, R. Caddeo, S. Montaldo, C. Oniciuc e P. Piu propuseram, em [10], um método baseado na idéia que as curvas bi-harmônicas $\gamma : (a, b) \rightarrow (M^n, g)$ são pontos críticos do funcional bi-energia

$$E_2 = \int_a^b L_2(x(t), x'(t), x''(t)) dt,$$

para uma oportuna bi-lagrangiana L_2 , que depende das componentes locais de γ e de suas derivadas até a segunda ordem. Portanto, da teoria clássica de Euler-Lagrange, segue que as curvas bi-harmônicas são soluções do sistema

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial L_2}{\partial x''_k} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_2}{\partial x'_k} \right) + \frac{\partial L_2}{\partial x_k} = 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad (2.4)$$

onde $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ representa a expressão da curva γ com respeito as coordenadas locais $\{x_i\}$ de M .

Na Seção 2.1 provaremos a equivalência dos dois métodos, ou seja, entre a equação bi-harmônica (1.46) e o sistema (2.4). Em seguida, o método de Euler-Lagrange é aplicado para determinar as curvas bi-harmônicas do plano hiperbólico e do grupo de Lie Sol.

2.1 Equivalência dos dois métodos

Seja $\gamma : (a, b) \rightarrow (M, g)$ uma curva diferenciável cuja expressão local é dada por $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$. Nesta seção mostraremos a equivalência entre a equação bi-harmônica (1.46)

e o sistema de Euler-Lagrange (2.4). Precisaremos do seguinte

Lema 2.1.1. *Seja $\gamma : (a, b) \rightarrow (M, g)$ uma curva diferenciável e $T = \gamma'$ seu campo de vetores velocidade. Sejam $\tau_i = x''_i + \sum_{j,k} \Gamma_{jk}^i x'_j x'_k$ as componentes do campo de tensão de γ com respeito ao sistema de coordenadas locais $\{x_i\}$ de M e*

$$L_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j} g_{ij}(x(t)) \tau_i \tau_j$$

a expressão da bi-lagrangiana nas coordenadas locais. Então

$$\begin{aligned} (i) \quad \frac{\partial L_2}{\partial x_k} &= g\left(\nabla_T^2 \frac{\partial}{\partial x_k}, \tau(\gamma)\right) + g\left(\mathbf{R}\left(T, \frac{\partial}{\partial x_k}\right)T, \tau(\gamma)\right); \\ (ii) \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_2}{\partial x'_k}\right) &= 2g\left(\nabla_T^2 \frac{\partial}{\partial x_k}, \tau(\gamma)\right) + 2g\left(\nabla_T \frac{\partial}{\partial x_k}, \nabla_T \tau(\gamma)\right); \\ (iii) \quad \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L_2}{\partial x''_k}\right) &= g\left(\nabla_T^2 \tau(\gamma), \frac{\partial}{\partial x_k}\right) + 2g\left(\nabla_T \tau(\gamma), \nabla_T \frac{\partial}{\partial x_k}\right) + g\left(\tau(\gamma), \nabla_T^2 \frac{\partial}{\partial x_k}\right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Demonstração. A partir de agora passaremos a omitir o símbolo de somatória em nossos cálculos, para que a notação não fique sobrecarregada.

(i) Da expressão da bi-lagrangiana temos

$$\frac{\partial L_2}{\partial x_k} = \left(\frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \tau_i \tau_j + g_{ij} \frac{\partial \tau_i}{\partial x_k} \tau_j \right).$$

Também, usando a fórmula de Koszul para g_{ij} e a expressão de $\tau(\gamma)$, resulta que

$$\frac{\partial L_2}{\partial x_k} = g_{ij} \tau_j \left\{ \Gamma_{ka}^i x''_a + \left(\Gamma_{kc}^i \Gamma_{ba}^c + \frac{\partial \Gamma_{ab}^i}{\partial x_k} \right) x'_a x'_b \right\}.$$

Agora, de

$$\Gamma_{ka}^i x''_a = \left(\nabla_T^2 \frac{\partial}{\partial x_k} \right)_i - \left(\Gamma_{ac}^i \Gamma_{bk}^c + \frac{\partial \Gamma_{bk}^i}{\partial x_a} \right) x'_a x'_b$$

obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_2}{\partial x_k} &= g_{ij} \tau_j \left\{ \left(\nabla_T^2 \frac{\partial}{\partial x_k} \right)_i + x'_a x'_b R_{bka}^i \right\} \\ &= g\left(\nabla_T^2 \frac{\partial}{\partial x_k}, \tau(\gamma)\right) + g\left(\mathbf{R}\left(T, \frac{\partial}{\partial x_k}\right)T, \tau(\gamma)\right). \end{aligned}$$

(ii) Como

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_2}{\partial x'_k} &= g_{ij} \frac{\partial \tau_i}{\partial x'_k} \tau_j \\ &= g_{ij} \tau_j \left(\frac{\partial x''_i}{\partial x'_k} + 2\Gamma_{bk}^i x'_b \right) \\ &= 2g\left(\nabla_T \frac{\partial}{\partial x_k}, \tau(\gamma)\right), \end{aligned}$$

então

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_2}{\partial x'_k} \right) = 2g \left(\nabla_T^2 \frac{\partial}{\partial x_k}, \tau(\gamma) \right) + 2g \left(\nabla_T \frac{\partial}{\partial x_k}, \nabla_T \tau(\gamma) \right).$$

(iii) De forma análoga ao feito no ítem anterior, sendo

$$\frac{\partial L_2}{\partial x''_k} = g_{ij} \frac{\partial \tau_i}{\partial x''_k} \tau_j \quad \text{e} \quad \frac{\partial \tau_i}{\partial x''_k} = \delta_{ki}$$

temos

$$\frac{\partial L_2}{\partial x''_k} = g_{kj} \tau_j = g \left(\tau(\gamma), \frac{\partial}{\partial x_k} \right).$$

Logo

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial L_2}{\partial x''_k} \right) = g \left(\nabla_T^2 \tau(\gamma), \frac{\partial}{\partial x_k} \right) + 2g \left(\nabla_T \tau(\gamma), \nabla_T \frac{\partial}{\partial x_k} \right) + g \left(\tau(\gamma), \nabla_T^2 \frac{\partial}{\partial x_k} \right),$$

o que termina a prova. □

Temos o seguinte resultado:

Proposição 2.1.2. *Seja $\gamma : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow (M, g)$ uma curva diferenciável e $T = \gamma'$ seu campo de vetores velocidade. Então a equação*

$$\nabla_T^3 T + R(T, \nabla_T T)T = 0$$

é equivalente ao sistema

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial L_2}{\partial x''_k} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_2}{\partial x'_k} \right) + \frac{\partial L_2}{\partial x_k} = 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad (2.6)$$

onde

$$L_2(x(t), x'(t), x''(t)) = \frac{1}{2} g(\tau(\gamma)(\gamma), \tau(\gamma)(\gamma)).$$

Demonstração. Do Lema 2.1.1 e do fato que $\tau(\gamma) = \nabla_T T$, temos

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial L_2}{\partial x''_k} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_2}{\partial x'_k} \right) + \frac{\partial L_2}{\partial x_k} &= g \left(\nabla_T^2 \tau(\gamma), \frac{\partial}{\partial x_k} \right) + 2g \left(\nabla_T \tau(\gamma), \nabla_T \frac{\partial}{\partial x_k} \right) + g \left(\tau(\gamma), \nabla_T^2 \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \\ &\quad - 2g \left(\nabla_T^2 \frac{\partial}{\partial x_k}, \tau(\gamma) \right) - 2g \left(\nabla_T \frac{\partial}{\partial x_k}, \nabla_T \tau(\gamma) \right) \\ &\quad + g \left(\nabla_T^2 \frac{\partial}{\partial x_k}, \tau(\gamma) \right) + g \left(R \left(T, \frac{\partial}{\partial x_k} \right) T, \tau(\gamma) \right) \\ &= g \left(\nabla_T^3 T + R(T, \nabla_T T)T, \frac{\partial}{\partial x_k} \right). \end{aligned}$$

□

Observação 2.1.3. Recordamos que a Lagrangiana L de primeira ordem, ou seja quando L depende apenas de t , $x(t)$ e $x'(t)$, corresponde a “energia natural” dada por:

$$\mathfrak{E} = \sum_i x'_i \frac{\partial L}{\partial x'_i} - L.$$

A característica principal de \mathfrak{E} é de ser constante ao longo de soluções do sistema de Euler-Lagrange associado à Lagrangiana L . De fato:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathfrak{E}(\gamma) &= \sum_i \left[x''_i \frac{\partial L}{\partial x'_i} + x'_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial x'_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} x'_i - \frac{\partial L}{\partial x'_i} x''_i \right] \\ &= \sum_i x'_i \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial x'_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} \right] = 0. \end{aligned}$$

No caso da bi-lagrangiana L_2 , que depende das derivadas das componentes da curva até a segunda ordem, a “bi-energia” natural, definida ao longo de γ , é

$$\mathfrak{E}_2(\gamma) = \sum_k \left\{ x'_k \left(\frac{\partial L_2}{\partial x'_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L_2}{\partial x''_k} \right) + x''_k \frac{\partial L_2}{\partial x''_k} \right\} - L_2.$$

Cabe aqui observar que, usando o Lema 2.1.1, podemos reescrever \mathfrak{E} na forma

$$\mathfrak{E}_2 = \frac{1}{2} \|\tau(\gamma)\|^2 - g(\gamma', \nabla_{\gamma'} \tau(\gamma)). \quad (2.7)$$

Passamos a demonstrar que \mathfrak{E}_2 é constante ao longo de uma solução do respectivo sistema de Euler-Lagrange (2.6). Com efeito

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathfrak{E}_2(\gamma) &= \sum_k \left\{ x''_k \left(\frac{\partial L_2}{\partial x'_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_2}{\partial x''_k} \right) \right) + x'_k \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_2}{\partial x'_k} \right) - \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial L_2}{\partial x''_k} \right) \right) + x''_k \frac{\partial L_2}{\partial x''_k} \right. \\ &\quad \left. + x''_k \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_2}{\partial x''_k} \right) - \frac{\partial L_2}{\partial x_k} x'_k - \frac{\partial L_2}{\partial x'_k} x''_k - \frac{\partial L_2}{\partial x''_k} x'''_k \right\} \\ &= - \sum_k \left\{ x'_k \left(\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial L_2}{\partial x''_k} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_2}{\partial x'_k} \right) + \frac{\partial L_2}{\partial x_k} \right) \right\} = 0. \end{aligned}$$

Como consequência da Observação 2.1.3, resulta a

Proposição 2.1.4. *Seja $\gamma : I \rightarrow (M, g)$ uma curva bi-harmônica parametrizada pelo comprimento de arco. Então a bi-Lagrangiana $L_2 = \frac{1}{2} g(\tau(\gamma), \tau(\gamma))$ é constante ao longo de γ .*

Demonstração. Derivando duas vezes $g(\gamma', \gamma') = 1$ temos

$$g(\nabla_{\gamma'} \tau(\gamma), \gamma') = -g(\tau(\gamma), \tau(\gamma)). \quad (2.8)$$

Substituindo (2.8) em (2.7) resulta que

$$\mathfrak{E}_2 = \frac{3}{2} \|\tau(\gamma)\|^2.$$

Logo, se γ é bi-harmônica, \mathfrak{E}_2 é constante ao longo de γ e, portanto, L_2 também o é. \square

Observação 2.1.5. Pondo

$$a := \frac{1}{2} \|\tau(\gamma)\|^2 - g(\gamma', \nabla_{\gamma'} \tau(\gamma)) \quad \text{e} \quad b := \|\nabla_{\gamma'} \gamma'\|^2,$$

verifica-se facilmente que se uma curva bi-harmônica $\gamma(t)$ continua sendo bi-harmônica após uma reparametrização $s(t)$ que a torne de velocidade unitária, então a função $s(t)$ deve satisfazer a EDO:

$$2s' s'' - s'^2 - 3b s'^4 + 2a = 0.$$

Observe também, que um polinômio $P^n(t)$ é uma solução desta equação se e somente se, para $b \neq 0$ e $a > 0$,

$$s(t) = P^n(t) = c + \sqrt[4]{\frac{2a}{3b}} t, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Nos exemplos que seguem passamos a considerar curvas bi-harmônicas parametrizadas pelo comprimento de arco.

Exemplo 2.1.6 (Curvas bi-harmônicas em \mathbb{R}^3). Seja $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ uma curva em \mathbb{R}^3 parametrizada pelo comprimento de arco, então seu campo de tensão é $\tau(\gamma)(t) = (\tau_1, \tau_2, \tau_3) = (x'', y'', z'')$ e o sistema (2.6), para a bi-lagrangiana

$$L_2 = \frac{1}{2} (x''^2 + y''^2 + z''^2),$$

se reduz a

$$\begin{cases} x^{(iv)} = 0 \\ y^{(iv)} = 0 \\ z^{(iv)} = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

As soluções gerais de (2.9) são polinômios de grau três no parâmetro t . Se olharmos para soluções parametrizadas pelo comprimento de arco, o grau deverá ser 1, o que implica no fato de as curvas serem geodésicas (i.e., retas de \mathbb{R}^3).

Exemplo 2.1.7 (Curvas bi-harmônicas em \mathbb{H}^2). Neste exemplo vamos determinar as curvas bi-harmônicas do plano hiperbólico \mathbb{H}^2 , provando que as mesmas são geodésicas.

Considere o modelo do semi-plano superior do plano hiperbólico $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ munido da métrica

$$g = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Temos o seguinte resultado:

Teorema 2.1.8. *Seja $\gamma : I \rightarrow (\mathbb{H}^2, g)$ uma curva diferenciável parametrizada pelo comprimento de arco. Então γ é bi-harmônica se e somente se sua curvatura geodésica satisfaz o sistema*

$$\begin{cases} \kappa_g'' - \kappa_g^3 - \kappa_g = 0 \\ \kappa_g \kappa_g' = 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

Demonstração. Os símbolos de Christoffel de (\mathbb{H}^2, g) não nulos são

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{y}, \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{y},$$

e as componentes do campo de tensão de uma curva genérica γ de \mathbb{H}^2 são dadas por:

$$\tau_1 = x'' - 2\frac{x'y'}{y} \quad \text{e} \quad \tau_2 = y'' + \frac{x'^2 - y'^2}{y}.$$

Além disso, a função bi-lagrangiana é

$$L_2 = \frac{1}{2y^2}(\tau_1^2 + \tau_2^2)$$

e o sistema de Euler-Lagrange assume a forma que segue:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{y^2} \frac{d}{dt}(\tau_1) - \frac{2x'\tau_2}{y^3} \right) = 0 \\ \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\tau(\gamma)^2}{y^2} \right) + \frac{d}{dt} \left(2\frac{x'\tau_1 + y'\tau_2}{y^3} \right) - \frac{\tau_1^2 + \tau_2^2}{y^3} + 2\frac{x'y'}{y^4}\tau_1 - \frac{x'^2 - y'^2}{y^4}\tau_2 = 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

Sendo que o sistema acima não é de fácil integração, faremos algumas considerações de acordo com a tese [30]. Da definição de curvatura geodésica obtemos que

$$\kappa_g^2 = \frac{\tau_1^2 + \tau_2^2}{y^2},$$

logo, (ver [6], pg 543),

$$\kappa_g = \frac{y'\tau_1 - x'\tau_2}{y^2}.$$

Desta última segue que

$$\kappa_g' = \frac{y' \frac{d}{dt}(\tau_1) - x' \frac{d}{dt}(\tau_2)}{y^2} - \frac{\tau_1}{y}.$$

Derivando κ_g^2 temos

$$\kappa_g \kappa_g' = \frac{\tau_1 \frac{d}{dt}(\tau_1) + \tau_2 \frac{d}{dt}(\tau_2)}{y^2} - \frac{y'}{y} \kappa_g^2 \quad (2.12)$$

e, derivando κ_g' , resulta que

$$\kappa_g'' = \frac{y' \frac{d^2}{dt^2}(\tau_1) - x' \frac{d^2}{dt^2}(\tau_2)}{y^2} + \frac{\tau_2 \frac{d}{dt}(\tau_1) - \tau_1 \frac{d}{dt}(\tau_2)}{y^2} - \frac{2}{y} \frac{d}{dt}(\tau_1) + \frac{y'}{y^2}(\tau_1). \quad (2.13)$$

Como γ é parametrizada pelo comprimento de arco, vale a condição

$$\frac{x'^2 + y'^2}{y^2} = 1,$$

a qual, por dupla derivação, fornece

$$x' \tau_1 + y' \tau_2 = 0 \quad (2.14)$$

e

$$\kappa_g^2 + \frac{x'}{y} \kappa_g + \frac{x' \frac{d}{dt}(\tau_1) + y' \frac{d}{dt}(\tau_2)}{y^2} = 0. \quad (2.15)$$

Pela (2.14), a equação (2.15) pode ser reescrita na forma

$$\kappa_g^2 - \frac{\tau_2}{y} + \frac{x' \frac{d}{dt}(\tau_1) + y' \frac{d}{dt}(\tau_2)}{y^2} = 0. \quad (2.16)$$

Derivando (2.16), obtemos

$$\begin{aligned} & 2\kappa_g \kappa_g' + \frac{x' \frac{d^2}{dt^2}(\tau_1) + y' \frac{d^2}{dt^2}(\tau_2)}{y^2} + \frac{\tau_1 \frac{d}{dt}(\tau_1) + \tau_2 \frac{d}{dt}(\tau_2)}{y^2} + x' \frac{y' \frac{d}{dt}(\tau_1) - x' \frac{d}{dt}(\tau_2)}{y^3} \\ & - y' \frac{x' \frac{d}{dt}(\tau_1) + y' \frac{d}{dt}(\tau_2)}{y^3} - \frac{1}{y} \frac{d}{dt}(\tau_2) + \frac{y'}{y^2} \tau_2 = 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

A partir de algumas considerações e derivações, pode-se provar que o sistema de Euler-Lagrange pode ser reescrito na forma

$$\begin{cases} \frac{1}{y^2} \frac{d^2}{dt^2}(\tau_1) - 2 \frac{\tau_1 \tau_2}{y^3} - 2 \frac{y'}{y^3} \frac{d}{dt}(\tau_1) - 2 \frac{x'}{y^3} \frac{d}{dt}(\tau_2) + 2 \frac{x' y'}{y^4} \tau_2 = 0 \\ \frac{1}{y^2} \frac{d^2}{dt^2}(\tau_2) - 4 \frac{y'}{y^3} \frac{d}{dt}(\tau_2) - \frac{(\tau_1)^2 + 3(\tau_2)^2}{y^3} + 2 \frac{(y')^2}{y^4} \tau_2 + \frac{\tau_2}{y^2} = 0. \end{cases} \quad (2.18)$$

Multiplicando a primeira equação por x' , a segunda por y' e somando, resulta que

$$\frac{x' \frac{d^2}{dt^2}(\tau_1) + y' \frac{d^2}{dt^2}(\tau_2)}{y^2} - \frac{y'}{y} \kappa_g^2 - 2y' \frac{x' \frac{d}{dt}(\tau_1) + y' \frac{d}{dt}(\tau_2)}{y^3} - \frac{2}{y} \frac{d}{dt}(\tau_2) + 3 \frac{y'}{y^2} \tau_2 = 0.$$

Subtraindo esta última da (2.17) e usando (2.16), se tem

$$2\kappa_g \kappa_g' + \frac{1}{y} \frac{d}{dt}(\tau_2) - \frac{y'}{y^2} \tau_2 + \frac{\tau_1 \frac{d}{dt}(\tau_1) + \tau_2 \frac{d}{dt}(\tau_2)}{y^2} + x' \frac{y' \frac{d}{dt}(\tau_1) - x' \frac{d}{dt}(\tau_2)}{y^3} = 0$$

e, pela (2.12), resulta que

$$3\kappa_g\kappa'_g + \frac{1}{y} \frac{d}{dt}(\tau_2) - \frac{y'}{y^2} \tau_2 + \frac{y'}{y} \kappa_g^2 + x' \frac{y' \frac{d}{dt}(\tau_1) - x' \frac{d}{dt}(\tau_2)}{y^3} = 0. \quad (2.19)$$

De (2.16) temos

$$-\frac{1}{y} \frac{d}{dt}(\tau_2) + \frac{y'}{y^2} \tau_2 = \frac{y'}{y} \kappa_g^2 + x' \frac{y' \frac{d}{dt}(\tau_1) - x' \frac{d}{dt}(\tau_2)}{y^3},$$

portanto, de (2.19), segue que

$$3\kappa_g\kappa'_g = 0,$$

que é a segunda equação do sistema (2.10).

Consideramos novamente as equações do sistema (2.18); multiplicando a primeira delas por y' , a segunda por $-x'$ e somando, obtemos

$$\frac{y' \frac{d^2}{dt^2}(\tau_1) - x' \frac{d^2}{dt^2}(\tau_2)}{y^2} + 3 \frac{x'}{y} \kappa_g^2 - 2 \frac{y'^2}{y^3} \frac{d}{dt}(\tau_1) + 2 \frac{x'y'}{y^3} \frac{d}{dt}(\tau_2) - \frac{x'}{y^2}(\tau_2) = 0,$$

da qual segue

$$\frac{y' \frac{d^2}{dt^2}(\tau_1) - x' \frac{d^2}{dt^2}(\tau_2)}{y^2} + 3 \frac{x'}{y} \kappa_g^2 - 2y' \frac{y' \frac{d}{dt}(\tau_1) - x' \frac{d}{dt}(\tau_2)}{y^3} - \frac{x'}{y^2}(\tau_2) = 0. \quad (2.20)$$

Multiplicando (2.15) por $-\kappa_g$ e somando-a à equação (2.20), obtemos

$$\frac{y' \frac{d^2}{dt^2}(\tau_1) - x' \frac{d^2}{dt^2}(\tau_2)}{y^2} + \frac{\tau_2 \frac{d}{dt}(\tau_1) - \tau_1 \frac{d}{dt}(\tau_2)}{y^2} - 2y' \frac{\left(y' \frac{d}{dt}(\tau_1) - x' \frac{d}{dt}(\tau_2)\right)}{y^3} - \kappa_g^3 + 2 \frac{x'}{y} \kappa_g^2 - \frac{x'}{y^2} \tau_2 = 0,$$

da qual, usando (2.13), se deduz

$$\kappa_g'' - \kappa_g^3 + \frac{2}{y} \frac{d}{dt}(\tau_1) - \frac{y'}{y^2} \tau_1 + 2 \frac{x'}{y} \kappa_g^2 - 2y' \frac{y' \frac{d}{dt}(\tau_1) - x' \frac{d}{dt}(\tau_2)}{y^3} - \frac{x'}{y^2} \tau_2 = 0. \quad (2.21)$$

Por fim, multiplicamos (2.16) por $-2 \frac{x'}{y}$, somamos ao resultado a (2.21) e utilizamos a expressão de κ_g obtendo, assim, a primeira equação do sistema (2.10):

$$\kappa_g'' - \kappa_g^3 - \kappa_g = 0.$$

□

Quanto à classificação das curvas bi-harmônicas do plano hiperbólico, temos:

Corolário 2.1.9. *Uma curva diferenciável $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}^2$ parametrizada pelo comprimento de arco é bi-harmônica se e somente se é uma geodésica.*

Demonstração. Da segunda equação de (2.10) resulta que κ_g deve ser constante e, então, da primeira equação segue que κ_g deve ser nula. \square

Exemplo 2.1.10 (Curvas bi-harmônicas do espaço Sol). Neste exemplo, usamos o sistema (2.6) para caracterizar as curvas bi-harmônicas do grupo de Lie tridimensional Sol. Representaremos o espaço Sol como sendo o grupo de matrizes

$$\left\{ \left(\begin{array}{ccc} e^{-x} & 0 & y \\ 0 & e^x & z \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) : x, y, z \in \mathbb{R} \right\},$$

munido da métrica invariante à esquerda, dada por

$$g = dx^2 + e^{2x} dy^2 + e^{-2x} dz^2.$$

Com respeito a esta métrica, uma base ortonormal de campos invariantes à esquerda é

$$E_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad E_2 = e^{-x} \frac{\partial}{\partial y}, \quad E_3 = e^x \frac{\partial}{\partial z}. \quad (2.22)$$

Dada uma curva parametrizada pelo comprimento de arco $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, iremos decompor seu campo de vetores velocidade na base (2.22):

$$T = \sum_i T_i E_i = x' E_1 + e^x y' E_2 + e^{-x} z' E_3.$$

Então, o campo de tensão de γ pode ser escrito como

$$\tau(\gamma) = \nabla_T T = \tau_i E_i,$$

onde

$$\begin{cases} \tau_1 &= x'' - e^{2x} y'^2 + e^{-2x} z'^2 \\ \tau_2 &= e^x y'' + 2e^x x' y' \\ \tau_3 &= e^{-x} z'' - 2e^{-x} x' z'. \end{cases}$$

Com isso, o sistema de Euler-Lagrange (2.6) se torna

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} \tau_1 - \frac{d}{dt} (2e^x y' \tau_2 - 2e^{-x} z' \tau_3) - \tau_1 (2e^{2x} y'^2 + 2e^{-2x} z'^2) + \tau_2^2 - \tau_3^2 = 0 \\ \frac{d^2}{dt^2} (e^x \tau_2) - \frac{d}{dt} (-2e^{2x} y' \tau_1 + 2e^x x' \tau_2) = 0 \\ \frac{d^2}{dt^2} (e^{-x} \tau_3) - \frac{d}{dt} (2e^{-2x} z' \tau_1 - 2e^{-x} x' \tau_3) = 0. \end{cases} \quad (2.23)$$

Mostraremos agora que o sistema (2.23) implica a seguinte

Proposição 2.1.11. *As curvas bi-harmônicas parametrizadas pelo comprimento de arco do espaço Sol são as geodésicas.*

Demonstração. Derivando duas vezes $g(\gamma', \gamma') = 1$ temos

$$\begin{aligned} & (x'')^2 + x'x''' + 2e^{2x}(x')^2(y')^2 + e^{2x}x''(y')^2 + 4e^{2x}x'y'y'' + e^{2x}(y'')^2 \\ & + e^{2x}y'y''' + 2e^{-2x}x''(z')^2 - 4e^{-2x}x'z'z'' + e^{-2x}(z'')^2 + e^{-2x}z'z''' = 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

A derivação de (2.24) com respeito a y'' e z'' nos dá

$$\begin{cases} 2e^{2x}(y'' + 2x'y') = 2e^x\tau_2 = 0 \\ 2e^{-2x}(z'' - 2x'z') = 2e^{-x}\tau_3 = 0, \end{cases} \quad (2.25)$$

o que implica $\tau_2 = \tau_3 = 0$. Além disso, de

$$g(T, \tau(\gamma)) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} g(T, T) = 0,$$

deduzimos que $T_1 = x' = 0$ e, então,

$$\begin{cases} \tau_1 = -e^{2x}y'^2 + e^{-2x}z'^2 \\ \tau_2 = e^x y'' = 0 \\ \tau_3 = e^{-x} z'' = 0. \end{cases} \quad (2.26)$$

Pondo $e^x y' = a$ e $e^{-x} z' = b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, obtemos $\tau_1 = (b^2 - a^2) = \text{constante}$. Portanto a primeira equação do sistema (2.23) pode ser escrita como

$$\tau_1(a^2 + b^2) = 0.$$

Sendo $a^2 + b^2 \neq 0$, concluímos que $\tau_1 = 0$ e, conseqüentemente, γ é uma geodésica.

□

Capítulo 3

Curvas bi-harmônicas próprias em uma variedade Riemanniana

Neste capítulo vamos descrever geometricamente a equação de Euler-Lagrange em uma variedade Riemanniana fazendo uso o referencial de Frenet (veja Definição 3.0.12), de acordo com [10]. Em seguida, consideraremos o caso de variedades Riemannianas bidimensionais (ver [11]) e, como primeiro resultado importante (ver Proposição 3.1.1), provaremos que ao longo de uma curva bi-harmônica não geodésica a curvatura de Gauss da superfície é constante, positiva e igual ao quadrado da curvatura geodésica.

Na Seção 3.2 focaremos nossa atenção ao caso das superfícies de revolução de \mathbb{R}^3 . Serão, então, descritas curvas bi-harmônicas de algumas superfícies como o toro de revolução, as superfícies de Delaunay e o elipsóide de revolução e, também, daremos a solução explícita da equação bi-harmônica para o caso de superfícies de revolução com curvatura Gaussiana constante (ver Seção 3.2.2).

Precisamos da seguinte

Definição 3.0.12 (veja, por exemplo, [28]). *O referencial de Frenet $\{F_i\}_{i=1,\dots,n}$ associado à curva $\gamma : I \rightarrow (M^n, g)$, parametrizada pelo comprimento de arco, é a ortonormalização da $(n+1)$ -upla*

$$\left\{ \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{(k)} d\gamma \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right\}_{k=0,1,\dots,n},$$

descrita por:

$$\begin{aligned}
F_1 &= d\gamma\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \\
\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^\gamma F_1 &= k_1 F_2, \\
\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^\gamma F_i &= -k_{i-1} F_{i-1} + k_i F_{i+1}, \quad \forall i = 2, \dots, n-1, \\
\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^\gamma F_n &= -k_{n-1} F_{n-1},
\end{aligned} \tag{3.1}$$

onde as funções $\{k_1, k_2, \dots, k_{n-1}\}$ são chamadas de curvaturas de γ e ∇^γ é a conexão no fibrado “pull-back” $\gamma^{-1}(TM)$, como na Seção 1.3. Note que $F_1 = T = \gamma'$ é o campo de vetores tangentes ao longo da curva γ .

Usando o referencial de Frenet, a equação bi-harmônica (1.46) se reduz a um sistema de equações diferenciais nas curvaturas de γ . Mais precisamente, temos o seguinte:

Proposição 3.0.13. *Seja $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow (M^n, g)$ ($n \geq 2$) uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, de um intervalo aberto de \mathbb{R} em uma variedade Riemanniana (M, g) . Então, γ é bi-harmônica se, e somente se,*

$$\begin{cases}
k_1 k_1' = 0 \\
k_1'' - k_1^3 - k_1 k_2^2 + k_1 R(F_1, F_2, F_1, F_2) = 0 \\
2k_1' k_2 + k_1 k_2' + k_1 R(F_1, F_2, F_1, F_3) = 0 \\
k_1 k_2 k_3 + k_1 R(F_1, F_2, F_1, F_4) = 0 \\
k_1 R(F_1, F_2, F_1, F_j) = 0, \quad j = 5, \dots, n.
\end{cases} \tag{3.2}$$

Demonstração. Por cálculo direto, temos que

$$\nabla_T^3 T = -3k_1' k_1 F_1 + (k_1'' - k_1^3 - k_1 k_2^2) F_2 + (2k_1' k_2 + k_1 k_2') F_3 + k_1 k_2 k_3 F_4.$$

Escrevendo $R(T, \nabla_T T)T$ no referencial de Frenet $\{F_i\}_{i=1, \dots, n}$ e observando que $R(F_1, F_2, F_1, F_1) = 0$, segue o resultado. \square

Como estamos interessados em curvas bi-harmônicas próprias (i.e. $k_1 \neq 0$), o sistema anterior se torna

$$\begin{cases}
k_1 = \text{constante} \neq 0 \\
-k_1^2 - k_2^2 + R(F_1, F_2, F_1, F_2) = 0 \\
k_2' + R(F_1, F_2, F_1, F_3) = 0 \\
k_2 k_3 + R(F_1, F_2, F_1, F_4) = 0 \\
R(F_1, F_2, F_1, F_j) = 0, \quad j = 5, \dots, n.
\end{cases} \tag{3.3}$$

Observação 3.0.14. O sistema (2.10) segue diretamente de (3.2) ao observarmos que, no caso de \mathbb{H}^2 , resulta $F_i = 0$ se $i > 2$, $k_i = 0$ para $i > 1$ e $R(F_1, F_2, F_1, F_2) = 1$.

3.1 Estudo das curvas bi-harmônicas em uma superfície

O objetivo desta seção é apresentar o artigo [11], que trata da geometria das curvas bi-harmônicas próprias de superfícies.

Sejam (M^2, g) uma superfície Riemanniana e $\gamma : I \rightarrow (M^2, g)$ uma curva diferenciável, parametrizada pelo comprimento de arco. Vimos no Capítulo 1, que γ é uma curva bi-harmônica se satisfizer a equação de Euler-Lagrange:

$$\nabla^2_{\gamma'} \tau + R(\gamma', \tau) \gamma' = 0, \quad (3.4)$$

sendo $\tau_\gamma = \nabla_{\gamma'} \gamma'$. Indicando por $\{T, N\}$ campos ortonormais tangentes a M^2 ao longo de γ , com $T = \gamma'$ então, pela (3.1), valem as equações de Frenet:

$$\nabla_T T = \kappa_g N \quad \text{e} \quad \nabla_T N = -\kappa_g T,$$

onde $\kappa_g = \|\nabla_{\gamma'} \gamma'\|$ é a curvatura geodésica de γ . Como observado anteriormente, estamos interessados em curvas bi-harmônicas próprias. Impondo esta condição e fazendo uso de (3.2) temos

$$\begin{cases} \kappa_g = \text{constante} \neq 0 \\ \kappa_g^2 = K, \end{cases} \quad (3.5)$$

onde $K = R(T, N, T, N)$ é a curvatura Gaussiana da superfície.

Do sistema (3.5) segue o seguinte:

Proposição 3.1.1. *Seja $\gamma : I \rightarrow (M^2, g)$ uma curva diferenciável em uma superfície M^2 . Então, se γ é uma curva bi-harmônica própria, a curvatura Gaussiana é constante ao longo de γ , positiva e igual ao quadrado da curvatura geodésica de γ . Portanto, se M^2 tiver curvatura Gaussiana não-positiva, toda curva bi-harmônica em M^2 é uma geodésica.*

3.2 Curvas bi-harmônicas em superfícies de revolução de \mathbb{R}^3

Seja $\alpha(u) = (f(u), 0, g(u))$, $u \in I \subset \mathbb{R}$, uma curva diferenciável parametrizada pelo comprimento de arco com $f(u) \neq 0$, $\forall u \in I$. Considere a superfície obtida pela rotação desta curva

em torno do eixo z , com a parametrização natural dada por:

$$X(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)), \quad (3.6)$$

onde v é o ângulo de rotação em torno do eixo z . Como

$$\left. \begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle = 1, \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle = 0, \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle = f^2(u), \\ N &= (-g'(u) \cos v, g'(u) \sin v, f'(u)), \end{aligned} \right\} \begin{aligned} e &= \langle N, X_{uu} \rangle = f'(u)g''(u) - g'(u)f''(u), \\ f &= \langle N, X_{uv} \rangle = 0, \\ g &= \langle N, X_{vv} \rangle = g'(u)f(u), \end{aligned} \quad (3.7)$$

a curvatura Gaussiana da superfície é dada por

$$K = -\frac{f''(u)}{f(u)}. \quad (3.8)$$

Logo K só depende da coordenada u , ou seja é constante ao longo de cada paralelo. Consequentemente, se a curvatura Gaussiana é constante ao longo de uma curva, ou a curva é um paralelo, ou está contida em uma parte da superfície com curvatura Gaussiana constante. Em particular, uma curva bi-harmônica própria ou é um paralelo ou está contida em uma superfície com curvatura Gaussiana constante. Por essa razão, estudaremos as curvas bi-harmônicas em superfícies de revolução com curvatura Gaussiana constante separadamente na Seção 3.2.2

Por hora, nos ocuparemos em determinar as superfícies de revolução nas quais todos os paralelos são curvas bi-harmônicas. Temos o seguinte:

Proposição 3.2.1. *Seja M uma superfície de revolução, localmente parametrizada por (3.6). Então um paralelo $u = \bar{u} \in I$ é uma curva bi-harmônica de M se e somente se é ponto crítico da função $\eta(u) := f(u)f'(u)$.*

Demonstração. Seja $X(u, v)$ a parametrização de M dada pela (3.6) e considere a parametrização pelo comprimento de arco do paralelo $u = \bar{u}$ dada por

$$\gamma_{\bar{u}}(t) = \left(f(\bar{u}) \cos \left(\frac{t}{f(\bar{u})} \right), f(\bar{u}) \sin \left(\frac{t}{f(\bar{u})} \right), g(\bar{u}) \right).$$

Calculemos sua curvatura geodésica κ_g . Indicando por $\sigma(\gamma_{\bar{u}}, X_u)$ o ângulo entre $\gamma_{\bar{u}}$ e X_u , vale a fórmula (ver, por exemplo, [6]):

$$\kappa_g = \sigma'(\gamma, X_u) + \frac{-\frac{F}{E}(E_u u' + E_v v') - E_v u' + G_u v' + 2F_u u'}{2\sqrt{EG - F^2}}.$$

Usando (3.7) e o fato que

$$\cos \sigma = \langle \gamma'_{\bar{u}}, X_u \rangle \equiv 0,$$

resulta que

$$\kappa_g = \frac{f'(\bar{u})}{f(\bar{u})}. \quad (3.9)$$

Consequentemente, substituindo (3.8) e (3.9) na segunda equação do sistema (3.5), resulta que $\gamma_{\bar{u}}$ é bi-harmônica se e somente se

$$f'^2(\bar{u}) + f''(\bar{u})f(\bar{u}) = \eta'(\bar{u}) = 0. \quad (3.10)$$

□

Teorema 3.2.2. *Seja $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície de revolução obtida pela rotação, ao redor do eixo z , da curva (parametrizada pelo comprimento de arco) $\alpha(u) = (f(u), 0, g(u))$, $u \in I \subset \mathbb{R}$, com $f(u) \neq 0$. Então, todos os paralelos de M são curvas bi-harmônicas se e só se vale um dos casos seguintes:*

1. f é constante e M é um cilindro circular reto;

ou

2. $f(u) = \pm c\sqrt{u}$

$$e$$

$$g(u) = u\sqrt{\frac{4u - c^2}{4u}} - \frac{c^2}{8} \log \left(8u + 8u\sqrt{\frac{4u - c^2}{4u}} - c^2 \right) + c_1,$$

onde c e c_1 são constantes positivas (veja Figura 3.1).

Demonstração. Da Proposição 3.2.1 segue que todos os paralelos de M são bi-harmônicos se e somente se $f(u)$ satisfizer a seguinte equação diferencial de segunda ordem:

$$f'^2(u) + f''(u)f(u) = 0. \quad (3.11)$$

É evidente que $f = \text{constante}$ satisfaz (3.11). Neste caso todos os paralelos serão geodésicas (já que $k_g = 0$), e a superfície de revolução será um cilindro circular reto. Assumindo que f não seja constante e integrando a equação (3.11) obtemos que $f(u) = \pm c\sqrt{u+d}$, $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$. A menos de uma translação da curva, podemos considerar $d = 0$. Como α está parametrizada pelo

comprimento de arco, $f'^2 + g'^2 = 1$, logo

$$\begin{aligned} g(u) &= \pm \int \sqrt{\frac{4u - c^2}{4u}} \, du = \pm \left(u \sqrt{\frac{4u - c^2}{4u}} - \frac{c^2}{8} \int \frac{1}{u} \sqrt{\frac{4u}{4u - c^2}} \, du \right), \\ &= \pm \left(u \sqrt{\frac{4u - c^2}{4u}} - \frac{c^2}{8} \log \left(8u + 8u \sqrt{\frac{4u - c^2}{4u}} - c^2 \right) \right) + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

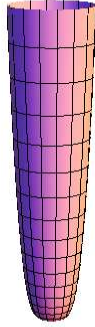


Figura 3.1: Superfície de revolução cujos paralelos são todos bi-harmônicos.

□

3.2.1 Exemplos de curvas bi-harmônicas em uma superfície de revolução com curvatura Gaussiana não constante

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3.2.3 (O toro de revolução). Considere a parametrização do toro de revolução

$$X(u, v) = ((a + r \cos(u/r)) \cos v, (a + r \cos(u/r)) \sin v, r \sin(u/r)),$$

onde $a > r > 0$. Sua curvatura Gaussiana é

$$K = -\frac{f''(u)}{f(u)} = \frac{\cos(u/r)}{r(a + \cos(u/r))}.$$

Pela Proposição 3.2.1, um paralelo do toro é uma curva bi-harmônica se

$$\sin^2(u/r) - \cos(u/r) \frac{(a + r \cos(u/r))}{r} = 0,$$

ou seja,

$$u = r \arccos \left(\frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 8r^2}}{4r} \right).$$

Logo, os paralelos bi-harmônicos do toro são:

$$u_1 = r \arccos \left(\frac{-a + \sqrt{a^2 + 8r^2}}{4r} \right), \quad u_2 = 2\pi r - u_1. \quad (3.12)$$

A Figura 3.2 mostra os paralelos bi-harmônicos do toro no caso em que $a = 3$ e $r = 1$.

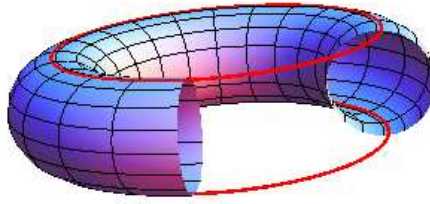


Figura 3.2: Paralelos bi-harmônicos do toro com $a = 3$ e $r = 1$.

Exemplo 3.2.4 (Superfícies de Delaunay). Devido à um teorema de C. Delaunay (veja [18]) sabemos que as superfícies de revolução imersas em \mathbb{R}^3 , com curvatura média constante, são aquelas obtidas pela rotação de roulettes de cônicas ao redor de seu eixo. Por essa razão, superfícies de revolução com curvatura média constante são chamadas de superfícies de Delaunay.

Usaremos a parametrização das superfícies de Delaunay dada por M.P. do Carmo e M. Dajczer em [20]. Primeiro definimos

$$\begin{cases} \rho(u) = \frac{\sqrt{1 + B^2 + 2B \operatorname{sen}(2Hu)}}{2H}, \\ \lambda(u) = \int_0^u f(s) ds, \end{cases}$$

onde B é uma constante não negativa, H é a curvatura média da superfície M e

$$f(s) = \frac{1 + B \operatorname{sen}(2Hs)}{\sqrt{1 + B^2 + 2B \operatorname{sen}(2Hs)}}.$$

Uma parametrização das superfícies de Delaunay é obtida pela rotação ao redor do eixo z da curva, parametrizada por comprimento de arco, $\alpha(u) = (\rho(u), 0, \lambda(u))$, ou seja

$$X(u, v) = (\rho(u) \cos v, \rho(u) \operatorname{sen} v, \lambda(u)).$$

Dependendo do valor de B , obtemos quatro tipos de superfícies de Delaunay, estas são:

1. O cilindro circular reto ($B = 0$);
2. Os ondulóides ($0 < B < 1$);
3. A esfera ($B = 1$);
4. Os nodóides ($B > 1$).

Da Proposição (3.2.1) segue que paralelos de superfícies de Delaunay que são curvas bi-harmônicas são dados por $u = \text{constante}$ tal que:

$$\frac{\rho'(u)^2}{\rho(u)^2} + \frac{\rho''(u)}{\rho(u)} = 0.$$

Como

$$\rho'(u) = \frac{B \cos(2Hu)}{\sqrt{1 + B^2 + 2B \sin(2Hu)}}$$

e

$$\rho''(u) = -\frac{2HB \sin(2Hu)}{\sqrt{1 + B^2 + 2B \sin(2Hu)}},$$

teremos

$$-\frac{4HB^2 \sin(2Hu)}{(1 + B^2 + 2B \sin(2Hu))} = 0.$$

Portanto, u deve ser da forma $u = k\pi/2H$, $k \in \mathbb{Z}$. Observe-se que o valor de u não depende de B , mas apenas da curvatura média H da superfície M .

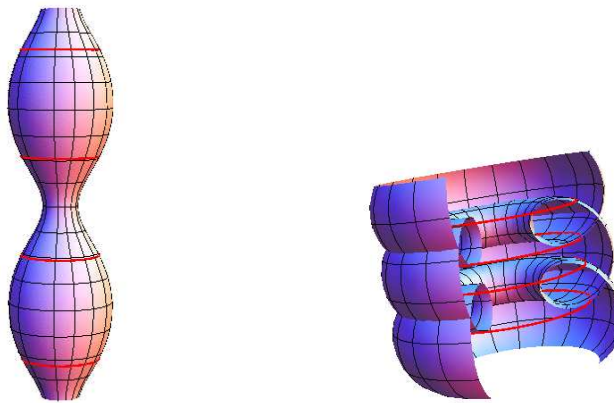


Figura 3.3: Paralelos bi-harmônicos no ondulóide e no nodóide, respectivamente.

É importante ressaltar que, em geral, é complicado parametrizar a curva geratriz da superfície de revolução pelo comprimento de arco. Algumas vezes é mais fácil calcular explicitamente a curvatura geodésica da curva e, então, utilizar a equação $K = \kappa_g^2$. Isto é ilustrado no exemplo que segue.

Exemplo 3.2.5 (O elipsóide de revolução). Seja $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ o elipsóide de revolução parametrizado por

$$X(u, v) = (a \cos u \cos v, a \cos u \sin v, c \sin u),$$

onde $a, c \in \mathbb{R}^+$. Os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais de M são

$$\begin{array}{l} E = \langle X_u, X_u \rangle = a^2 \sin^2 u + c^2 \cos^2 u, \\ F = \langle X_u, X_v \rangle = 0, \\ G = \langle X_v, X_v \rangle = a^2 \cos^2 u \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} e = \langle N, X_{uu} \rangle = \frac{ca}{\sqrt{c^2 \cos^2 u + a^2 \sin^2 u}} \\ f = \langle N, X_{uv} \rangle = 0, \\ g = \langle N, X_{vv} \rangle = \frac{ca \cos^2 u}{\sqrt{c^2 \cos^2 u + a^2 \sin^2 u}}, \end{array} \right.$$

onde

$$N = \frac{(-c \cos u \cos v, -c \cos u \sin v, -a \sin u)}{\sqrt{c^2 \cos^2 u + a^2 \sin^2 u}}.$$

Logo, sua curvatura Gaussiana é:

$$K = \frac{c^2}{(a^2 \sin^2 u + c^2 \cos^2 u)^2}.$$

A curvatura geodésica de um paralelo de M parametrizado pelo comprimento de arco é dada por:

$$\begin{aligned} \kappa_g &= \sigma'(\gamma_u, X_u) + \frac{-\frac{F}{E}(E_u u' + E_v v') - E_v u' + G_u v' + 2F_u u'}{2\sqrt{EG - F^2}} \\ &= \frac{\sin u}{\cos u \sqrt{a^2 \sin^2 u + c^2 \cos^2 u}}. \end{aligned}$$

Logo, da equação $K = \kappa_g^2$ resulta que

$$\frac{c^2}{(a^2 \sin^2 u + c^2 \cos^2 u)^2} = \frac{\sin^2 u}{\cos^2 u (a^2 \sin^2 u + c^2 \cos^2 u)},$$

ou seja,

$$(a^2 - c^2) \sin^4 u + 2c^2 \sin^2 u - c^2 = 0.$$

Portanto, se M^2 não for uma esfera, i.e. para $a \neq c$, chegamos à equação

$$\left(\sin^2 u + \frac{c^2}{(a^2 - c^2)^2} \right)^2 - \frac{c^4}{(a^2 - c^2)^2} - \frac{c^2}{a^2 - c^2} = 0,$$

cujas soluções são

$$\operatorname{sen}^2 u = \begin{cases} \frac{c}{c+a}, \\ \frac{c}{c-a}. \end{cases}$$

A segunda equação nunca é satisfeita; já a primeira nos dá os dois paralelos bi-harmônicos $u = \arcsen(\pm\sqrt{c/(c+a)})$.

3.2.2 Curvas bi-harmônicas em superfícies de revolução com curvatura Gaussiana constante

Seja $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície de revolução com curvatura Gaussiana constante positiva $K = \frac{1}{a^2}$. A superfície M^2 pode ser parametrizada por (veja, por exemplo, [6]):

$$X(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \operatorname{sen} v, g(u)),$$

onde

$$f(u) = b \cos(u/a) \quad e \quad g(u) = \int_0^u \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{s}{a}\right)} ds, \quad b \in \mathbb{R}^+.$$

Seja $\gamma(t) = X(u(t), v(t))$ uma curva em M^2 parametrizada por comprimento de arco. Calcularemos agora o triedro de Darboux (ver [6]) ao longo de γ . Como

$$X_u = \left(\frac{df}{du} \cos v, \frac{df}{du} \operatorname{sen} v, \frac{dg}{du} \right) \quad e \quad X_v = (-f(u) \operatorname{sen} v, f(u) \cos v, 0),$$

o vetor unitário normal a M restrito a γ é dado por

$$N(t) := \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|_{|\gamma(t)}} = \left(\frac{dg}{du} \cos v, \frac{dg}{du} \operatorname{sen} v, -\frac{df}{du} \right)_{|\gamma(t)}.$$

Sendo γ parametrizada pelo comprimento de arco, o campo de vetores

$$\gamma'(t) = u'X_u + v'X_v$$

satisfaz

$$1 = \|\gamma'(t)\|^2 = u'^2 + v'^2 f^2(u).$$

O triedro de Darboux ao longo de γ será, então, dado por:

$$\begin{aligned} T &= \gamma'(t) = u'X_u + v'X_v, \\ V &= N \wedge T = v'fX_u - \frac{u'}{f}X_v, \\ N &= \left(\frac{dg}{du} \cos v, \frac{dg}{du} \operatorname{sen} v, -\frac{df}{du} \right). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Das equações de Darboux:

$$\begin{aligned} T' &= \kappa_g V + \kappa_n N, \\ V' &= -\kappa_g T + \tau_g N, \\ N' &= -\kappa_n T - \tau_g V, \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde κ_n é a curvatura normal e τ_g é a torção geodésica de γ , segue que

$$\langle T', V \rangle = \kappa_g. \quad (3.15)$$

Usando (3.13), (3.15) e $u'^2 + v'^2 f^2 = 1$, teremos

$$\langle T', V \rangle = -v'' u' f + u'' v' f - v' (u')^2 \frac{df}{du} - v' \frac{df}{du}. \quad (3.16)$$

Agora, derivando $u'^2 + f^2 v'^2 = 1$ e usando o fato de γ não ser um paralelo (i.e. $u' \neq 0$), obtemos

$$u'' = -\frac{v' v'' f^2 + v'^2 u' f \frac{df}{du}}{u'}.$$

Substituindo em (3.16) resulta que

$$\kappa_g = -\frac{v'' f + 2v' u' \frac{df}{du}}{u'}.$$

Dessa forma, a equação bi-harmônicas $\kappa_g^2 = K$ se torna

$$-\frac{v'' f + 2u' v' f'}{u'} = \frac{1}{a}.$$

Multiplicando os dois lados por $f u'$, temos

$$-\frac{d}{dt} v'(t) f^2(u(t)) = \frac{1}{a} f(u) u'(t).$$

Logo, se substituirmos $f(u) = b \cos(u/a)$, teremos

$$\frac{d}{dt} (v' b^2 \cos^2(u/a)) = \frac{d}{dt} (-b \operatorname{sen}(u/a)).$$

Dessa forma, a condição para que $\gamma(t) = X(u(t), v(t))$ seja uma curva bi-harmônica parametrizada por comprimento de arco é dada pelo sistema

$$\begin{cases} v' b^2 \cos^2(u/a) = -b \operatorname{sen}(u/a) + c \\ v'^2 b^2 \cos^2(u/a) + u'^2 = 1. \end{cases} \quad (3.17)$$

Resolvendo esse sistema com respeito a u' obtemos

$$u'(t) = \pm \frac{1}{b \cos(u/a)} \sqrt{b^2 - c^2 - 2b^2 \operatorname{sen}^2(u/a) + 2bc \operatorname{sen}(u/a)},$$

portanto

$$\pm \frac{a}{\sqrt{2}} \arcsen \left(\frac{c - 2b \operatorname{sen}(u/a)}{\sqrt{2b^2 - c^2}} \right) = t + A, \quad A \in \mathbb{R},$$

com $2b^2 - c^2 > 0$. Explicitando $u(t)$, resulta

$$u(t) = a \arcsen \left(\frac{c \pm \sqrt{2b^2 - c^2} \operatorname{sen}(B + (\sqrt{2}/a)t)}{2b} \right), \quad B := \frac{\sqrt{2}}{a} A.$$

Quanto a $v(t)$, do sistema (3.17) resulta que

$$v'(t) = -\frac{b \operatorname{sen}(u(t)/a) + c}{b^2 \cos^2(u(t)/a)},$$

logo

$$v(t) = \int_0^t \left(-\frac{\operatorname{sen}(u(s)/a)}{b \cos^2(u(s)/a)} + \frac{c}{b^2 \cos^2(u(s)/a)} \right) ds.$$

Desta forma, encontramos a solução geral para as curvas bi-harmônicas em superfícies de revolução com curvatura Gaussiana constante positiva que não são paralelos. A Figura 3.4 mostra essas curvas nos três diferentes tipos de superfícies de revolução com curvatura Gaussiana constante positiva:

1. O tipo esfera ($a = b$);
2. O tipo bola de futebol americano ($b < a$);
3. O tipo barril ($a < b$).

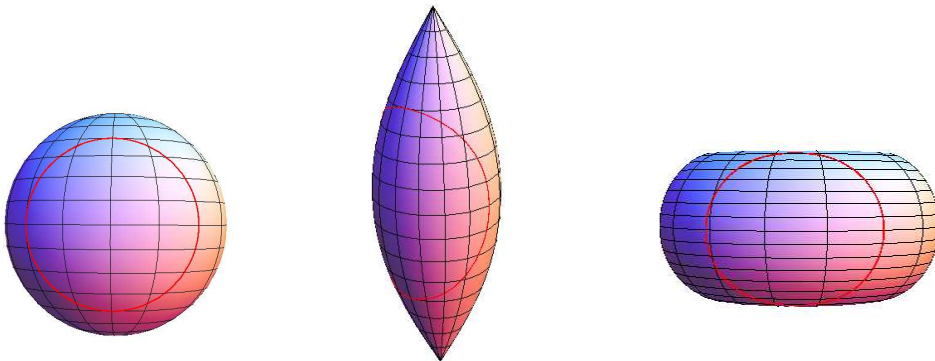


Figura 3.4: Curvas bi-harmônicas em superfícies com curvatura Gaussiana constantes positivas.

Capítulo 4

Classificação das curvas bi-harmônicas dos BCV-espços

Neste capítulo daremos a classificação completa das curvas bi-harmônicas nas 3-variedades de Bianchi-Cartan-Vranceanu utilizando as condições obtidas no Capítulo 2. Cabe aqui ressaltar que no caso de variedades Riemannianas tridimensionais com curvatura seccional constante $K \leq 0$, as curvas bi-harmônicas são geodésicas (veja [19] para $K = 0$, e [8] para $K < 0$). Além disso, na Seção 4.5 provaremos que no caso em que $K > 0$ as curvas bi-harmônicas são hélices, ou seja curvas que possuem curvatura geodésica e torsão geodésica constantes.

4.1 Espaços de Bianchi-Cartan-Vranceanu e sua estrutura Riemanniana

É um resultado clássico da geometria diferencial (veja, por exemplo, [35]) que a dimensão máxima do grupo das isometrias de uma variedade Riemanniana tridimensional é 6 e, nesse caso, a variedade é uma forma espacial. Também não existem 3-variedades com grupo de isometrias de dimensão 5 (veja [23]). Além disso, se uma 3-variedade possui grupo de isometrias 4-dimensional, então é uma variedade Riemanniana homogênea.

Para as variedades Riemannianas homogêneas tridimensionais existe uma representação local dada pela seguinte família a dois parâmetros de métricas Riemannianas:

$$g_{\ell,m} = \frac{dx^2 + dy^2}{[1 + m(x^2 + y^2)]^2} + \left(dz + \frac{\ell}{2} \frac{y dx - x dy}{[1 + m(x^2 + y^2)]} \right)^2, \quad \ell, m \in \mathbb{R}, \quad (4.1)$$

definidas em $M = \mathbb{R}^3$ se $m \geq 0$, se não em $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < -1/m\}$.

As métricas $g_{\ell, m}$, denominadas *métricas de Bianchi-Cartan-Vranceanu*, podem ser encontradas na classificação das variedades Riemannianas homogêneas tridimensionais que foi dada por L. Bianchi em 1897 (veja [3]) e, mais tarde, aparecem na forma (4.1) em [14, 35], com É. Cartan e G. Vranceanu (respectivamente).

A importância e o interesse na geometria para esta família de métricas está no fato dela incluir todas as métricas homogêneas tridimensionais cujo grupo de isometrias é de dimensão 4 ou 6, exceto às de curvatura seccional constante negativa. Indicando com \mathbb{H}^2 o disco hiperbólico de raio $1/(2\sqrt{-m})$ e com \mathbb{S}^2 a esfera de \mathbb{R}^3 de raio $1/(2\sqrt{m})$, temos a situação ilustrada na Figura 4.1.

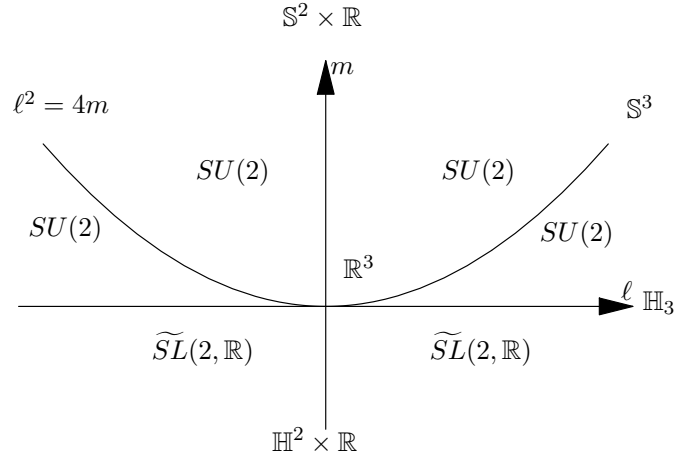


Figura 4.1: Descrição geométrica da métrica $g_{\ell, m}$ (veja [32]).

Observe que:

- se $\ell^2 = 4m$, então M possui curvatura seccional constante e não negativa, ou seja M é o espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 ou a esfera \mathbb{S}^3 ;
- se $\ell = 0$, então M é produto de uma superfície de curvatura Gaussiana constante $4m$ com a reta real \mathbb{R} ;
- se $\ell \neq 0$ e $m > 0$, M é localmente o grupo unitário especial $SU(2)$;
- se $\ell \neq 0$ e $m < 0$, M é localmente o recobrimento universal do grupo linear especial, i.e. $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$;

- se $\ell \neq 0$ e $m = 0$, obtemos o espaço de Heisenberg \mathbb{H}_3 munido de uma métrica invariante à esquerda.

Para que possamos fazer o estudo das curvas bi-harmônicas nesses espaços, vamos estudar sua estrutura Riemanniana. A métrica de Bianchi-Cartan-Vranceanu pode ser escrita através de 1-formas, como

$$g_{\ell, m} = \sum_{i=1}^3 w_i \otimes w_i,$$

onde

$$w_1 = \frac{dx}{F}; \quad w_2 = \frac{dy}{F}; \quad w_3 = dz + \frac{\ell}{2} \frac{ydx - xdy}{F}, \quad F = [1 + m(x^2 + y^2)] \quad (4.2)$$

A base ortonormal de campos de vetores duais às 1-formas é

$$E_1 = F \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\ell y}{2} \frac{\partial}{\partial z}; \quad E_2 = F \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\ell x}{2} \frac{\partial}{\partial z}; \quad E_3 = \frac{\partial}{\partial z}. \quad (4.3)$$

Vamos agora dar a expressão, com respeito à base ortonormal (4.3), da conexão Levi-Civita e das componentes não nulas do tensor curvatura. Cabe aqui observar que adotaremos as seguintes notações e convenção de sinal. O operador de curvatura é dado por:

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z,$$

onde X, Y, Z são campos de vetores diferenciáveis em M . Além disso,

$$R_{ijk} = R(E_i, E_j)E_k \quad R_{hijk} = R(E_h, E_i, E_j, E_k).$$

Temos que

$$\begin{array}{l} \nabla_{E_1} E_1 = 2myE_2, \\ \nabla_{E_2} E_2 = 2mxE_1, \\ \nabla_{E_3} E_3 = 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} \nabla_{E_1} E_2 = -2myE_1 + \frac{\ell}{2} E_3, \\ \nabla_{E_2} E_1 = -2mxE_2 - \frac{\ell}{2} E_3, \\ \nabla_{E_3} E_1 = \nabla_{E_1} E_3 = -\frac{\ell}{2} E_2, \\ \nabla_{E_3} E_2 = \nabla_{E_2} E_3 = \frac{\ell}{2} E_1, \end{array} \right. \quad (4.4)$$

e

$$R_{1212} = 4m - \frac{3}{4}\ell^2; \quad R_{1313} = \frac{\ell^2}{4} \quad R_{2323} = \frac{\ell^2}{4}. \quad (4.5)$$

4.2 Condições para curvas bi-harmônicas em $(M, g_{\ell, m})$

Seja $\gamma : I \rightarrow (M, g_{\ell, m})$ uma curva diferenciável parametrizada por comprimento de arco e seja

$$F_1 = T = \sum_{i=1}^3 T_i E_i, \quad F_2 = N = \sum_{i=1}^3 N_i E_i, \quad F_3 = B = \sum_{i=1}^3 B_i E_i,$$

o referencial de Frenet tangente a M ao longo de γ , como em (3.1), escrito na base (4.3). Então (3.3) dá origem ao sistema

$$\begin{cases} k_1 = \text{constante} \neq 0 \\ -k_1^2 - k_2^2 + R(T, N, T, N) = 0 \\ k_2' + R(T, N, T, B) = 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

O próximo passo será determinar as expressões de $R(T, N, T, N)$ e $R(T, N, T, B)$. Temos que

$$\begin{aligned} R(T, N, T, N) &= R\left(\sum_{i=1}^3 T_i E_i, \sum_{j=1}^3 N_j E_j, \sum_{k=1}^3 T_k E_k, \sum_{l=1}^3 N_l E_l\right) \\ &= \sum_{i,j,k,l=1}^3 T_i N_j T_k N_l R_{ijkl} \\ &= (T_1 N_2 - T_2 N_1)^2 R_{1212} + (T_1 N_3 - T_3 N_1)^2 R_{1313} + (T_2 N_3 - T_3 N_2)^2 R_{2323} \\ &= B_3^2 R_{1212} + B_2^2 R_{1313} + B_1^2 R_{2323} \\ &= B_3^2 \left(4m - \frac{3}{4}\ell^2\right) + (B_2^2 + B_1^2) \frac{\ell^2}{4} \\ &= \frac{\ell^2}{4} - (\ell^2 - 4m) B_3^2, \end{aligned}$$

e, também,

$$\begin{aligned} R(T, N, T, B) &= R\left(\sum_{i=1}^3 T_i E_i, \sum_{j=1}^3 N_j E_j, \sum_{k=1}^3 T_k E_k, \sum_{l=1}^3 B_l E_l\right) \\ &= \sum_{i,j,k,l=1}^3 T_i N_j T_k B_l R_{ijkl} \\ &= (T_1 N_2 - T_2 N_1) (T_1 B_2 - T_2 B_1) \left(4m - \frac{3}{4}\ell^2\right) \\ &\quad + (T_1 N_3 T_1 - T_3 N_1 T_1 + T_2 N_3 T_2 - T_3 N_2 T_2) B_3 \frac{\ell^2}{4} \\ &\quad + \left[(T_3 N_1 T_3 - T_1 N_3 T_3) (T_2 N_3 - T_3 N_2) \right. \\ &\quad \left. + (T_3 N_2 T_3 - T_2 N_3 T_3) (T_3 N_1 - T_1 N_3) \right] \frac{\ell^2}{4} \\ &= (\ell^2 - 4m) N_3 B_3. \end{aligned}$$

Então, fazendo $k_1 = \kappa_g$ (curvatura geodésica da curva) e $k_2 = -\tau_g$ (torção da curva), o sistema (4.6) é reescrito na seguinte forma:

$$\begin{cases} \kappa_g = \text{constante} \neq 0 \\ \kappa_g^2 + \tau_g^2 = \frac{\ell^2}{4} - (\ell^2 - 4m)B_3^2 \\ \tau_g' = (\ell^2 - 4m)N_3B_3. \end{cases} \quad (4.7)$$

A partir de agora vamos impor condições sobre os parâmetros ℓ e m , a fim de obter as equações explícitas das curvas bi-harmônicas nas variedades $(M, g_{\ell, m})$. No caso $\ell = m = 0$ (espaço euclidiano tridimensional) do sistema acima resulta que as curvas bi-harmônica são as geodésicas. Os demais casos são estudados nas seções que seguem.

4.3 Equações explícitas das curvas bi-harmônicas em $(M, g_{\ell, m})$ com $\ell^2 \neq 4m$ e $m \neq 0$

Nesse parágrafo faremos o estudo das curvas bi-harmônicas nos espaços de Bianchi-Cartan-Vranceanu para o caso em que $\ell^2 \neq 4m$ e $m \neq 0$. Com isto estaremos considerando os casos dos espaços $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, $SU(2)$ e $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$.

Temos o seguinte resultado:

Teorema 4.3.1. *Se $\gamma : I \rightarrow (M, g_{\ell, m})$ é uma curva bi-harmônica própria parametrizada pelo comprimento de arco, então ela é uma hélice.*

Demonstração. Seja $\gamma : I \rightarrow (M, g_{\ell, m})$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco que não é geodésica. Então, das equações de Frenet resulta que

$$\langle \nabla_T B, E_3 \rangle = \langle \tau_g N, E_3 \rangle = \tau_g N_3. \quad (4.8)$$

Por outro lado, usando as propriedades da conexão, temos

$$\nabla_T B = \sum_i B_i' E_i + \sum_{i,j} T_j B_i \nabla_{E_j} E_i,$$

de onde segue

$$\langle \nabla_T B, E_3 \rangle = B_3' + (T_1 B_2 - T_2 B_1) \frac{\ell}{2},$$

e, então,

$$\langle \nabla_T B, E_3 \rangle = B_3' - N_3 \frac{\ell}{2}. \quad (4.9)$$

Comparando as equações (4.8) e (4.9) obtemos

$$\tau_g N_3 = B_3' - \frac{\ell}{2} N_3. \quad (4.10)$$

Assumimos agora que γ seja uma curva bi-harmônica própria. Primeiro mostraremos que $B_3 \neq 0$.

Para isto supomos que $B_3 = 0$, então (4.10) nos dá

$$N_3 \left(\tau_g + \frac{\ell}{2} \right) = 0.$$

A última equação gera duas possibilidades:

1. se $N_3 = 0$ (e $B_3 = 0$) então $T = \pm E_3$ e γ é uma geodésica, já que $\nabla_{E_3} E_3 = 0$.

2. Se $\left(\tau_g + \frac{\ell}{2} \right) = 0$ então, usando a segunda equação do sistema (4.7), temos

$$\kappa_g^2 + \tau_g^2 = \frac{\ell^2}{4}.$$

Logo $\kappa_g = 0$ e, novamente, concluímos que γ é uma geodésica.

Agora sabendo que $B_3 \neq 0$, derivando a segunda equação de (4.7), fazendo uso da expressão de τ_g' dada em (4.7) e do fato que $\ell^2 \neq 4m$, obtemos

$$\tau_g N_3 = -B_3'.$$

Somando a (4.10) a esta última equação obtemos

$$(4\tau_g + \ell)N_3 = 0.$$

Nesse ponto, lançando mão da terceira equação de (4.7), concluímos que τ_g é constante, portanto γ é uma hélice. \square

Corolário 4.3.2. *Seja $\gamma : I \rightarrow (M, g_{\ell, m})$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. Então γ é uma curva bi-harmônica própria se e somente se*

$$\begin{cases} \kappa_g = \text{constante} \neq 0 \\ \tau_g = \text{constante} \\ N_3 = 0 \\ \kappa_g^2 + \tau_g^2 = \frac{\ell^2}{4} - (\ell^2 - 4m)B_3^2. \end{cases} \quad (4.11)$$

Demonstração. Segue do sistema (4.7) utilizando $N_3 = 0$, obtido no teorema anterior. \square

Provaremos agora um resultado que nos permite obter as equações explícitas das curvas bi-harmônicas próprias, nos espaços que estamos considerando.

Lema 4.3.3. *Seja $\gamma : I \rightarrow (M, g_{\ell, m})$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco que não é uma geodésica. Se $N_3 = 0$, então*

$$T(t) = \text{sen } \alpha_0 \cos \beta(t) E_1 + \text{sen } \alpha_0 \text{sen } \beta(t) E_2 + \cos \alpha_0 E_3, \quad (4.12)$$

onde $\alpha_0 \in (0, \pi)$.

Demonstração. Se $\gamma' = T = T_1 E_1 + T_2 E_2 + T_3 E_3$, então

$$\nabla_T T = \left(T_1' + 2mx T_2^2 - 2my T_1 T_2 + \ell T_2 T_3 \right) E_1 + \left(T_2' + 2my T_1^2 - 2mx T_1 T_2 - \ell T_1 T_3 \right) E_2 + T_3' E_3.$$

Das fórmulas de Frenet temos que $\nabla_T T = \kappa_g N$ e, então, $N_3 = 0$ equivale a $T_3' = 0$, ou seja a $T_3 = \text{constante}$. Como $|T_3| \leq \|T\| = 1$, se $|T_3| = 1$ então $\nabla_T T = 0$ que, por sua vez, implica em γ ser uma geodésica. Segue então que $T_3 \in (-1, 1)$. Consequentemente, existe uma constante $\alpha_0 \in (0, \pi)$ tal que $\cos \alpha_0 = T_3$. Além disso, como $\|T\| = 1$ então $T_1^2 + T_2^2 = \text{sen}^2(\alpha_0)$. Podemos então definir uma função suave $\beta(t)$, tal que $\cos \beta(t) \text{sen } \alpha_0 = T_1$ e $\text{sen } \beta(t) \text{sen } \alpha_0 = T_2$. Dessa forma,

$$T(t) = \text{sen } \alpha_0 \cos \beta(t) E_1 + \text{sen } \alpha_0 \text{sen } \beta(t) E_2 + \cos \alpha_0 E_3.$$

\square

Usando a expressão (4.12) para T , podemos estabelecer o resultado central desta seção.

Teorema 4.3.4. *Seja $(M, g_{\ell, m})$ o espaço de Biachi-Cartan-Vranceanu com $m \neq 0$ e $\ell^2 - 4m \neq 0$. Assumindo que $\delta = \ell^2 + (16m - 5\ell^2) \text{sen}^2(\alpha_0) \geq 0$, $\alpha_0 \in (0, \pi)$, e denotando por $2\omega_{1,2} = -\ell \cos \alpha_0 \pm \sqrt{\delta}$, então, as equações paramétricas de qualquer curva bi-harmônica própria de $(M, g_{\ell, m})$ são de um dos três tipos listados abaixo.*

Tipo I:

$$\begin{cases} x(t) = b \text{sen } \alpha_0 \text{sen } \beta(t) + c, & b, c \in \mathbb{R}, \quad b > 0, \\ y(t) = -b \text{sen } \alpha_0 \cos \beta(t) + d, & d \in \mathbb{R}, \\ z(t) = \frac{\ell}{4m} \beta(t) + \frac{1}{4m} [(4m - \ell^2) \cos \alpha_0 - \ell \omega_{1,2}] t, \end{cases} \quad (4.13)$$

onde β é uma solução não constante da seguinte EDO:

$$\beta' + 2md \operatorname{sen} \alpha_0 \cos \beta - 2mc \operatorname{sen} \alpha_0 \operatorname{sen} \beta = \ell \cos \alpha_0 + 2mb \operatorname{sen}^2(\alpha_0) + \omega_{1,2} \quad (4.14)$$

e as constantes satisfazem

$$c^2 + d^2 = \frac{b}{m} \left\{ \left(\ell \cos \alpha_0 + \omega_{1,2} - \frac{1}{b} \right) + m b \operatorname{sen}^2 \alpha_0 \right\}.$$

Tipo II: Se $\beta = \beta_0 = \text{constante}$ e $\cos \beta_0 \operatorname{sen} \beta_0 \neq 0$, as equações paramétricas são

$$\begin{cases} x(t) = x(t) \\ y(t) = x(t) \tan \beta_0 + a \\ z(t) = \frac{1}{4m} [(4m - \ell^2) \cos \alpha_0 - \ell \omega_{1,2}] t + b, \quad b \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (4.15)$$

onde

$$a = \frac{\omega_{1,2} + \ell \cos \alpha_0}{2m \operatorname{sen} \alpha_0 \cos \beta_0}$$

e $x(t)$ é solução da seguinte EDO:

$$x' = \left(1 + m(x^2 + (x \tan \beta_0 + a)^2) \right) \operatorname{sen} \alpha_0 \cos \beta_0. \quad (4.16)$$

Tipo III: Se $\cos \beta_0 \operatorname{sen} \beta_0 = 0$, a menos de trocar x com y , então $\cos \beta_0 = 0$ e as equações paramétricas são dadas por:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \mp \frac{\omega_{1,2} + \ell \cos \alpha_0}{2m \operatorname{sen} \alpha_0} \\ y(t) = y(t) \\ z(t) = \frac{1}{4m} [(4m - \ell^2) \cos \alpha_0 - \ell \omega_{1,2}] t + b, \quad b \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (4.17)$$

onde $y(t)$ é uma solução da seguinte EDO:

$$y' = \pm (1 + m[x_0^2 + y^2]) \operatorname{sen} \alpha_0. \quad (4.18)$$

Demonstração. Seja $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. Faremos uso das fórmulas de Frenet, do Corolário 4.3.2 e do Lema 4.3.3. A derivada covariante do campo vetorial T , dado em (4.12), é

$$\begin{aligned} \nabla_T T &= -\beta' \operatorname{sen} \alpha_0 \operatorname{sen} \beta E_1 + \beta' \operatorname{sen} \alpha_0 \cos \beta E_2 + \operatorname{sen} \alpha_0 \cos \beta \nabla_T E_1 \\ &+ \operatorname{sen} \alpha_0 \operatorname{sen} \beta \nabla_T E_2 + \cos \alpha_0 \nabla_T E_3 \\ &= \left[-\beta' \operatorname{sen} \alpha_0 \operatorname{sen} \beta - 2my \operatorname{sen}^2 \alpha_0 \operatorname{sen} \beta \cos \beta + 2mx \operatorname{sen}^2 \alpha_0 \operatorname{sen}^2 \beta \right. \\ &+ \left. \ell \cos \alpha_0 \operatorname{sen} \alpha_0 \operatorname{sen} \beta \right] E_1 \\ &+ \left[\beta' \operatorname{sen} \alpha_0 \cos \beta + 2my \operatorname{sen}^2 \alpha_0 \cos^2 \beta - 2mx \operatorname{sen}^2 \alpha_0 \operatorname{sen} \beta \cos \beta \right. \\ &- \left. \ell \cos \alpha_0 \operatorname{sen} \alpha_0 \cos \beta \right] E_2. \end{aligned}$$

Igualando tal expressão com $\kappa_g N$, obtemos

$$\kappa_g^2 = (\beta' + 2my \operatorname{sen} \alpha_0 \cos \beta - 2mx \operatorname{sen} \alpha_0 \operatorname{sen} \beta - \ell \cos \alpha_0)^2 \operatorname{sen}^2 \alpha_0$$

e conseqüentemente (sendo $\alpha_0 \in (0, \pi)$), resulta

$$\kappa_g = |\beta' + 2my \operatorname{sen} \alpha_0 \cos \beta - 2mx \operatorname{sen} \alpha_0 \operatorname{sen} \beta - \ell \cos \alpha_0| \operatorname{sen} \alpha_0.$$

Neste ponto assumimos que

$$\omega := \beta' + 2my \operatorname{sen} \alpha_0 \cos \beta - 2mx \operatorname{sen} \alpha_0 \operatorname{sen} \beta - \ell \cos \alpha_0 > 0. \quad (4.19)$$

Observe que se $\omega = 0$ então γ é geodésica e se $\omega < 0$ obtemos as mesmas soluções, portanto não estamos perdendo a generalidade. Dessa forma, temos

$$\kappa_g = \omega \operatorname{sen} \alpha_0 \quad (4.20)$$

e

$$N = -\operatorname{sen} \beta E_1 + \cos \beta E_2.$$

Logo

$$B = T \wedge N = -\cos \alpha_0 \cos \beta E_1 - \cos \alpha_0 \operatorname{sen} \beta E_2 + \operatorname{sen} \alpha_0 E_3. \quad (4.21)$$

Vamos agora derivar B para obter a expressão da torsão geodésica τ_g . Como

$$\nabla_T B = \left(-\omega \cos \alpha_0 - \frac{\ell}{2} \right) N$$

e por outro lado, $\nabla_T B = \tau_g N$, segue que

$$\tau_g = -\omega \cos \alpha_0 - \frac{\ell}{2}. \quad (4.22)$$

Para obtermos as equações explícitas para $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, devemos integrar o sistema $\frac{d\gamma}{dt} = T$. Em nosso caso

$$\begin{aligned} T(t) &= \operatorname{sen} \alpha_0 \cos \beta(t) E_1 + \operatorname{sen} \alpha_0 \operatorname{sen} \beta(t) E_2 + \cos \alpha_0 E_3 \\ &= \operatorname{sen} \alpha_0 \cos \beta(t) \left(F \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\ell}{2} y \frac{\partial}{\partial z} \right) + \operatorname{sen} \alpha_0 \operatorname{sen} \beta(t) \left(F \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\ell}{2} x \frac{\partial}{\partial z} \right) + \cos \alpha_0 \left(\frac{\partial}{\partial z} \right), \end{aligned}$$

o que dá origem ao sistema

$$\begin{cases} \frac{x'}{1 + m(x^2 + y^2)} = \operatorname{sen} \alpha_0 \cos \beta \\ \frac{y'}{1 + m(x^2 + y^2)} = \operatorname{sen} \alpha_0 \operatorname{sen} \beta \\ z' = \cos \alpha_0 + \frac{\ell}{2} \operatorname{sen} \alpha_0 (x \operatorname{sen} \beta - y \cos \beta). \end{cases} \quad (4.23)$$

Assumiremos agora que $\beta' \neq 0$, ou seja, consideraremos soluções do **Tipo I**. Derivando (4.20), obtemos

$$0 = \kappa'_g = \omega' \operatorname{sen} \alpha_0,$$

logo $\omega' = 0$. Substituindo ω e utilizando as duas primeiras equações de (4.23) resulta que

$$\beta'' + \frac{2my'x'}{1+m(x^2+y^2)} - \frac{\beta'2myy'}{1+m(x^2+y^2)} - \frac{2my'x'}{1+m(x^2+y^2)} - \frac{\beta'2mxx'}{1+m(x^2+y^2)} = 0$$

e, então,

$$\frac{\beta''(1+m(x^2+y^2)) - \beta'(2myy' + 2mxx')}{1+m(x^2+y^2)} = 0.$$

Assim

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\beta'}{1+m(x^2+y^2)} \right) = 0$$

e

$$1+m(x^2+y^2) = b\beta', \quad b > 0. \quad (4.24)$$

Substituindo (4.24) em (4.23), conseguimos o sistema

$$\begin{cases} x' = b\beta' \operatorname{sen} \alpha_0 \cos \beta \\ y' = b\beta' \operatorname{sen} \alpha_0 \operatorname{sen} \beta \\ z' = \cos \alpha_0 - \frac{\ell}{2} \operatorname{sen} \alpha_0 (x \operatorname{sen} \beta - y \cos \beta), \end{cases}$$

do qual resulta que

$$\begin{cases} x(t) = b \operatorname{sen} \alpha_0 \operatorname{sen} \beta(t) + c \\ y(t) = -b \operatorname{sen} \alpha_0 \cos \beta(t) + d \\ z(t) = \left(\cos \alpha_0 + \frac{\ell b}{2} \operatorname{sen}^2 \alpha_0 \right) t + \frac{\ell}{2} \int (c \operatorname{sen} \alpha_0 \operatorname{sen} \beta(t) - d \operatorname{sen} \alpha_0 \cos \beta(t)) dt. \end{cases} \quad (4.25)$$

Para determinar β substituímos na última equação de (4.11) os valores de κ_g , τ_g e B_3 obtidos em (4.20), (4.22) e (4.21), respectivamente. Isto nos dá

$$\omega^2 + \omega l \cos \alpha_0 + (\ell^2 - 4m) \operatorname{sen}^2 \alpha_0 = 0. \quad (4.26)$$

Como assumimos que $\delta = \ell^2 + (16m - 5\ell^2) \operatorname{sen}^2 \alpha_0 \geq 0$, então as soluções de (4.26) são

$$\omega_{1,2} = \frac{-\ell \cos \alpha_0 \pm \sqrt{\delta}}{2},$$

que são sempre diferente de zero. Como assumimos que ω é uma constante positiva, temos que escolher a raiz positiva de (4.26). Se ω fosse negativo, ocorre uma troca de sinais em κ_g , τ_g e

B_3 , contudo chegaríamos a mesma equação (4.26), portanto aproveitamos as duas soluções de (4.26).

Substituindo os valores de x e y (obtidos em (4.25)) na (4.19), encontramos

$$\beta' - 2m \operatorname{sen} \alpha_0 (b \operatorname{sen} \alpha_0 \cos^2 \beta - d \cos \beta + b \operatorname{sen}_a l \operatorname{sen}^2 \beta + c \operatorname{sen} \beta) = \ell \cos \alpha_0 + \omega_{1,2},$$

de onde segue

$$\beta' - 2m(c \operatorname{sen} \alpha_0 \operatorname{sen} \beta - d \operatorname{sen} \alpha_0 \cos \beta) = \ell \cos \alpha_0 + 2mb \operatorname{sen}^2 \alpha_0 + \omega_{1,2}. \quad (4.27)$$

Então, tomando a integral da última equação, o valor de z dado em (4.25) se torna o desejado.

Para o caso das soluções **Tipo I**, substituindo (4.25) e (4.24) em (4.27),

$$\begin{aligned} b(\ell \cos \alpha_0 + 2\nabla b \operatorname{sen}^2 \alpha_0 + \omega_{1,2}) &= 1 + m(x^2 + y^2) + 2bmd \operatorname{sen} \alpha_0 \cos \beta \\ &- 2bmc \operatorname{sen} \alpha_0 \operatorname{sen} \beta \\ &= 1 + m[(b \operatorname{sen} \alpha_0 \operatorname{sen} \beta(t) + c)^2 \\ &+ (-b \operatorname{sen} \alpha_0 \cos \beta(t) + d)^2] \\ &+ 2bmd \operatorname{sen} \alpha_0 \cos \beta - 2bmc \operatorname{sen} \alpha_0 \operatorname{sen} \beta \end{aligned}$$

e, então, temos

$$c^2 + d^2 = \frac{b}{m} \left\{ \left(\ell \cos \alpha_0 - \frac{1}{b} \right) + mb \operatorname{sen}^2 \alpha_0 \right\}.$$

Para o **Tipo II**, usamos $\beta = \beta_0 = \text{constante}$ nas duas primeiras equações de (4.23) obtendo:

$$x' = [1 + m(x^2 + y^2)] \operatorname{sen} \alpha_0 \cos \beta_0, \quad (4.28)$$

$$y' = [1 + m(x^2 + y^2)] \operatorname{sen} \alpha_0 \operatorname{sen} \beta_0.$$

Como $\operatorname{sen} \beta_0 \cos \beta_0 \neq 0$,

$$y' = x' \tan \beta_0,$$

portanto

$$y = x \tan \beta_0 + a. \quad (4.29)$$

Substituindo (4.29) em (4.28) temos

$$x' = \left[1 + m(x^2 + (x \tan \beta_0 + a)^2) \right] \operatorname{sen} \alpha_0 \cos \beta_0.$$

Além disso, usando (4.29) em (4.19),

$$\begin{aligned} \omega_{1,2} + \ell \cos \alpha_0 &= 2m \operatorname{sen} \alpha_0 (y \cos \beta_0 - x \operatorname{sen} \beta_0) \\ &= 2m \operatorname{sen} \alpha_0 [(x \tan \beta_0 + a) \cos \beta_0 - x \operatorname{sen} \beta_0], \end{aligned}$$

logo

$$a = \frac{\omega_{1,2} + \ell \cos \alpha_0}{2m \sin \alpha_0 \cos \beta_0}. \quad (4.30)$$

Para determinar a expressão de z , utilizamos (4.29) e (4.30) na última equação do sistema (4.23) e integramos, obtendo

$$z = \frac{1}{4m} \left[(4m - \ell^2) \cos \alpha_0 - \ell \omega_{1,2} \right] t + b, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Para as soluções **Tipo III**, ao supormos $\sin \beta_0 \cos \beta_0 = 0$ teremos que analisar dois casos.

Se $\cos \beta_0 = 0$, então da primeira equação de (4.23) resulta que $x(t) = x_0 \in \mathbb{R}$. Além disso, como $\sin \beta_0 = \pm 1$, da segunda equação de (4.23) obtemos

$$y' = \pm [1 + m(x_0^2 + y^2)] \sin \alpha_0.$$

Usando (4.19) obtemos que

$$x_0 = \mp \left(\frac{\omega_{1,2} + \ell \cos \alpha_0}{2m \sin \alpha_0} \right). \quad (4.31)$$

Por fim, determinamos a expressão de $z(t)$ substituindo (4.31) na última equação de (4.23) e integrando, obtendo

$$z(t) = \frac{1}{4m} \left[(4m - \ell^2) \cos \alpha_0 - \ell \omega_{1,2} \right] t + b, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Se $\sin \beta_0 = 0$, há uma troca nos papéis de x e y e o resultado segue de forma análoga. \square

Observação 4.3.5. A condição $m \neq 0$ foi utilizada pela primeira vez na demonstração do caso das soluções **Tipo I** do Teorema 4.3.4, na obtenção de $z(t)$ a partir da EDO que define β , de forma que todos os resultados obtidos anteriormente continuam válidos se $m = 0$.

4.4 Equações explícitas das curvas bi-harmônicas próprias em \mathbb{H}_3

Passaremos agora a estudar as curvas bi-harmônicas próprias do espaço de Heisenberg \mathbb{H}_3 , ou seja da variedade $(M, g_{\ell, m})$ com $\ell = 1$ e $m = 0$. Tais resultados foram obtidos por R. Caddeo, C. Oniciuc e P. Piu em [12].

O grupo de Heisenberg \mathbb{H}_3 pode ser visto como o espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 com a multiplicação

$$L_{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})}(x, y, z) = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})(x, y, z) = (\tilde{x} + x, \tilde{y} + y, \tilde{z} + z + \frac{1}{2}\tilde{x}y - \frac{1}{2}\tilde{y}x) \quad (4.32)$$

e munido da métrica Riemanniana g dada por

$$g = dx^2 + dy^2 + \left(dz + \frac{y}{2}dx - \frac{x}{2}dy\right)^2. \quad (4.33)$$

A métrica g é invariante à esquerda e é isométrica as demais, também muito conhecidas, que são invariantes com respeito a uma composição com a multiplicação de matrizes de Heisenberg.

Em seguida é dado o resultado que classifica as curvas bi-harmônicas de \mathbb{H}_3 .

Teorema 4.4.1. *As equações paramétricas de uma curva bi-harmônica própria qualquer de (\mathbb{H}_3, g) , parametrizada pelo comprimento de arco, são dadas por:*

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{A} \operatorname{sen} \alpha_0 \operatorname{sen}(At + a) + b \\ y(t) = -\frac{1}{A} \operatorname{sen} \alpha_0 \cos(At + a) + c \\ z(t) = \left(\cos \alpha_0 + \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha_0}{2A}\right)t - \frac{b}{2A} \operatorname{sen} \alpha_0 \cos(At + a) - \frac{c}{2A} \operatorname{sen} \alpha_0 \operatorname{sen}(At + a) + d, \end{cases} \quad (4.34)$$

onde

$$A = \frac{\cos \alpha_0 \pm \sqrt{5 \cos^2 \alpha_0 - 4}}{2}, \quad \alpha_0 \in \left(0, \arccos \frac{2\sqrt{5}}{5}\right] \cup \left[\arccos \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right), \pi\right)$$

e $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}_3$, $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, uma curva bi-harmônica própria parametrizada pelo comprimento de arco. Da equação (4.27) temos que

$$\beta' = \frac{\cos \alpha_0 \pm \sqrt{5 \cos^2 \alpha_0 - 4}}{2} = A.$$

Impondo a condição $5 \cos^2 \alpha_0 \geq 4$ (para que tenhamos soluções reais), $\beta(t) = At + a$, com $a \in \mathbb{R}$.

Para obtermos as equações explícitas de γ basta integrar o sistema $\gamma' = T$, que neste caso é dado por:

$$\begin{cases} x'(t) = \operatorname{sen} \alpha_0 \cos(At + a) \\ y'(t) = \operatorname{sen} \alpha_0 \operatorname{sen}(At + a) \\ z'(t) = \cos \alpha_0 + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \alpha_0 [\operatorname{sen}(At + a)x(t) - \cos(At + a)y(t)], \end{cases} \quad (4.35)$$

já que substituindo as expressões de E_1 , E_2 e E_3 em (4.12) obtemos

$$\begin{aligned} T = \operatorname{sen} \alpha_0 \cos(\beta) \frac{\partial}{\partial x} + \operatorname{sen} \alpha_0 \operatorname{sen}(\beta) \frac{\partial}{\partial y} \\ + \left[\cos \alpha_0 + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \alpha_0 (\operatorname{sen}(At + a)x(t) - \cos(At + a)y(t)) \right] \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

□

Observação 4.4.2. As curvas bi-harmônicas de \mathbb{H}_3 podem ser obtidas pela intersecção das superfícies S e S' , parametrizadas (respectivamente) por:

$$\begin{cases} x(u, v) = \frac{1}{A} \operatorname{sen} \alpha_0 \cos(Au + a) + b \\ y(u, v) = -\frac{1}{A} \operatorname{sen} \alpha_0 \operatorname{sen}(Au + a) + c \\ z(u, v) = v, \end{cases} \quad (4.37)$$

$$\begin{cases} x(u, v) = \frac{v}{A} \operatorname{sen} \alpha_0 \cos(Au + a) + b \\ y(u, v) = -\frac{v}{A} \operatorname{sen} \alpha_0 \operatorname{sen}(Au + a) + c \\ z(u, v) = \left(\cos \alpha_0 + \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha_0}{2A} \right) u + \frac{b}{2} y(u, v) - \frac{c}{2} x(u, v) + d. \end{cases} \quad (4.38)$$

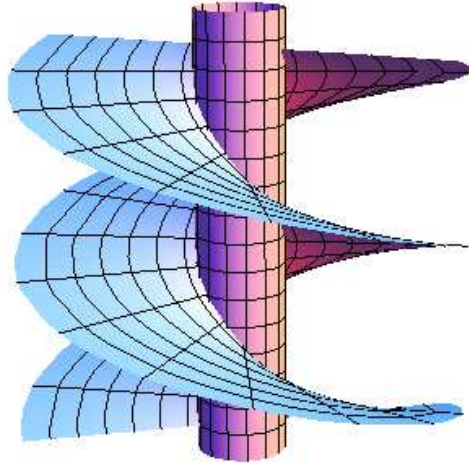


Figura 4.2: Intersecção entre as superfícies S e S' .

A superfície S possui curvatura média constante diferente de zero e é o cilindro circular reto com eixo paralelo ao eixo de rotação de \mathbb{H}_3 no ponto $(b, c, 0)$ e com a diretriz o círculo no plano $z = 0$ centrado neste ponto; esse círculo tem curvatura geodésica constante também em \mathbb{H}_3 . A superfície S' é um helicóide que é minimal no grupo de Heisenberg, como pode ser facilmente constatado pelo uso das fórmulas dadas por M. Bekkar em [2]. Além disso, as curvas bi-harmônicas são geodésicas do cilindro.

Observação 4.4.3. Denotamos por γ a curva dada em (4.34) com $b = c = d = 0$, e por $\tilde{\gamma}$ a curva (4.34) com $b^2 + c^2 > 0$. É claro que as duas são hélices de \mathbb{H}_3 . Toda curva bi-harmônica $\tilde{\gamma}$ pode ser obtida de γ por meio de uma translação à esquerda, isto é $\tilde{\gamma} = L_{(b,c,d)} \circ \gamma$. Observa-se também que γ é uma hélice em \mathbb{R}^3 , mas $\tilde{\gamma}$ não é.

4.5 Curvas bi-harmônicas próprias da esfera \mathbb{S}^3

Nesta seção serão classificadas as curvas bi-harmônicas não geodésicas da esfera unitária tridimensional. Iniciaremos fazendo algumas considerações inerentes as variedades tridimensionais de curvatura seccional constante.

Considere, então, (M^3, g) uma variedade Riemanniana tridimensional de curvatura seccional constante e igual K . Seja $\gamma : I \rightarrow (M^3, g)$ uma curva diferenciável parametrizada pelo comprimento de arco e $\{T, N, B\}$ o referencial de Frenet ao longo de γ como em (3.1), com $F_1 = T$, $F_2 = B$ e $F_3 = N$. Valem, então, as relações:

$$\begin{cases} \nabla_T T = \kappa_g N \\ \nabla_T N = -\kappa_g T + \tau_g B \\ \nabla_T B = -\tau_g N, \end{cases} \quad (4.39)$$

onde $\kappa_g = \|\tau(\gamma)\| = \|\nabla_T T\|$ é a curvatura geodésica de γ e τ_g é sua torsão geodésica. Do sistema (3.2), concluímos que uma curva de (M^3, g) é bi-harmônica se, e somente se,

$$\begin{cases} \kappa_g \kappa_g' = 0 \\ \kappa_g'' - \kappa_g^3 - \kappa_g \tau_g^2 + \kappa_g K = 0 \\ 2 \kappa_g' \tau_g + \kappa_g \tau_g' = 0. \end{cases}$$

Imposto a condição de que a curva não seja uma geodésica, obtemos

$$\begin{cases} \kappa_g = \text{constante} \neq 0 \\ \kappa_g^2 + \tau_g^2 = K \\ \tau_g = \text{constante}. \end{cases} \quad (4.40)$$

Conseqüentemente, podemos enunciar o resultado seguinte.

Proposição 4.5.1. *Seja $\gamma : I \rightarrow (M^3, g)$ uma curva bi-harmônica própria em uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante K . Se K é não positiva, então toda curva bi-harmônica é uma geodésica de (M^3, g) .*

Desta proposição segue que o estudo de curvas bi-harmônicas em variedades tridimensionais com curvatura seccional constante passa a ter interesse apenas para o caso em que $K > 0$. Por essa razão passaremos a estudar o caso da esfera \mathbb{S}^3 . Faremos primeiro algumas considerações.

Seja (M, h) uma hipersuperfície de \mathbb{R}^{n+1} , munida da métrica induzida. Denotaremos por $\bar{\nabla}$ e ∇ as conexões riemannianas de \mathbb{R}^{n+1} e M , respectivamente. Seja p um ponto de M , $\eta \in (T_p M)^\perp$ um vetor unitário e N uma extensão local de η , unitária e normal a M . Sendo $g : M \rightarrow \mathbb{S}^n$, a aplicação normal de Gauss, $T_p M$ e $T_{g(p)}\mathbb{S}^n$ são paralelos e, portanto, serão identificados. Denotaremos por II a segunda forma fundamental de M e S_η o operador de forma. Com isso, vale

$$dg_p(X_p) = \frac{d}{dt}(N \circ c(t))_{t=0} = \bar{\nabla}_{X_p} N = (\bar{\nabla}_{X_p} N)^T = -S_\eta(X_p),$$

onde $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ é uma curva com $c(0) = p$ e $c'(0) = X_p \in T_p M$. Aqui usamos o fato de que, sendo $\langle N, N \rangle = 1$, $\bar{\nabla}_{X_p} N = (\bar{\nabla}_{X_p} N)^T$. Segue-se que $-S_\eta$ é a derivada da aplicação normal de Gauss.

Considere, agora, $M = \mathbb{S}^n$ (esfera unitária), $p \in \mathbb{S}^n$ e $\eta = -p$. Para esse caso, a aplicação de Gauss é $-I$, sendo I a identidade de \mathbb{S}^n . Segue que $S_\eta(X_p) = -dg_p(X_p) = X_p$, $X_p \in T_p \mathbb{S}^n$ e, então,

$$\begin{aligned} \text{II}(X_p, Y_p) &= \langle \text{II}(X_p, Y_p), \eta \rangle \eta \\ &= \langle S_\eta(X_p), Y_p \rangle \eta \\ &= -\langle X_p, Y_p \rangle p, \quad X_p, Y_p \in T_p \mathbb{S}^n. \end{aligned}$$

Portanto, a equação de Gauss

$$\nabla_X^{\mathbb{S}^n} Y = \bar{\nabla}_X Y + \langle X, Y \rangle p. \quad (4.41)$$

Agora estamos aptos a dar a demonstração da proposição que segue.

Proposição 4.5.2. *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ uma curva bi-harmônica própria parametrizada pelo comprimento de arco. Então*

$$\gamma^{iv} + 2\gamma'' + (1 - \kappa_g^2)\gamma = 0. \quad (4.42)$$

Demonstração. Tomando a derivada covariante da segunda equação de (4.39) com respeito a T , temos

$$\begin{aligned} \nabla_T^2 N &= -\kappa_g \nabla_T T + \tau_g \nabla_T B \\ &= -(\kappa_g^2 + \tau_g^2)N \\ &= -N, \end{aligned}$$

ou seja

$$\nabla_T^2 N + N = 0. \quad (4.43)$$

Por outro lado, fazendo uso da equação de Gauss (4.41) em $\nabla_T N$ resulta que

$$\begin{aligned} \nabla_T^2 N &= (\nabla_T N)' + \langle T, \nabla_T N \rangle \gamma \\ &= (N' + \langle T, N \rangle \gamma)' - \kappa_g \gamma \\ &= N'' - \kappa_g \gamma. \end{aligned}$$

Além disso, aplicando (4.41) em $\nabla_T T = \kappa_g N$ conseguimos

$$N = \frac{1}{\kappa_g}(\gamma'' + \gamma).$$

Reescrevendo (4.43) como

$$N'' - \kappa_g \gamma + N = 0,$$

temos

$$\left(\frac{1}{\kappa_g}(\gamma'' + \gamma) \right)'' - \kappa_g \gamma + \frac{1}{\kappa_g}(\gamma'' + \gamma) = 0,$$

de onde segue o resultado. \square

A classificação das curvas bi-harmônicas de \mathbb{S}^3 é dada no teorema que segue:

Teorema 4.5.3. *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ uma curva bi-harmônica própria parametrizada pelo comprimento de arco. Então $\kappa_g \leq 1$ e temos dois casos:*

1. $\kappa_g = 1$ e γ é um círculo de raio $\frac{1}{\sqrt{2}}$;
2. $0 < \kappa_g < 1$ e γ é uma geodésica do toro de Clifford¹.

¹Consideramos a imersão

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{S}^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times \mathbb{S}^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &\rightarrow \mathbb{S}^3 \\ ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &\mapsto (x_1, x_2, y_1, y_2), \end{aligned}$$

onde $x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2 = \frac{1}{2}$. A subvariedade de \mathbb{S}^3 , $\mathcal{T} = \mathbb{S}^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times \mathbb{S}^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, é chamada de *toro de Clifford*. Observe que dado um ponto $p = (x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathcal{T}$, os vetores

$$V_p = (-x_2, x_1, 0, 0) \quad \text{e} \quad W_p = (0, 0, -y_2, y_1) \quad (4.44)$$

constituem um base do espaço tangente em p ao toro de Clifford.

Demonstração. Da segunda equação de (4.40), segue que $\kappa_g \leq 1$. Temos, então, os dois casos considerados abaixo.

1. Se $\kappa_g = 1$, então a solução geral de (4.42) é

$$\gamma(t) = c_1 \cos(\sqrt{2}t) + c_2 \sin(\sqrt{2}t) + c_3 t + c_4.$$

Como $|\gamma|^2 = |\gamma'|^2 = 1$, usando as relações de Frenet² temos que $c_3 = 0$, enquanto c_1, c_2 e c_4 são vetores constantes e ortogonais com $|c_1|^2 = |c_2|^2 = |c_4|^2 = \frac{1}{2}$.

Portanto, a menos de isometrias de \mathbb{S}^3 , a curva γ é da forma

$$\gamma(t) = \left(\frac{\cos(\sqrt{2}t)}{\sqrt{2}}, \frac{\sin(\sqrt{2}t)}{\sqrt{2}}, d_1, d_2 \right),$$

com $d_1^2 + d_2^2 = |c_4|^2 = \frac{1}{2}$, ou seja é uma circunferência de raio $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2. Agora supondo $0 < \kappa_g < 1$, a solução geral de (4.42) é

$$\gamma(t) = c_1 \cos(at) + c_2 \sin(at) + c_3 \cos(bt) + c_4 \sin(bt),$$

onde $a = \sqrt{1 + \kappa_g}$ e $b = \sqrt{1 - \kappa_g}$. Novamente usamos $|\gamma|^2 = 1, |\gamma'|^2 = 1$ e as relações de Frenet para concluir (com contas análogas ao caso anterior) que $|c_1|^2 = |c_2|^2 = |c_3|^2 = |c_4|^2 = \frac{1}{2}$ e que tais vetores são ortogonais entre si.

Segue, então, que a solução para $0 < \kappa_g < 1$ é

$$\gamma(t) = \left(\frac{\cos(at)}{\sqrt{2}}, \frac{\sin(at)}{\sqrt{2}}, \frac{\cos(bt)}{\sqrt{2}}, \frac{\sin(bt)}{\sqrt{2}} \right).$$

É evidente que, para este caso, $\gamma(t) \in \mathbb{S}^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times \mathbb{S}^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

²De fato, de $N = \frac{1}{\kappa_g}(\gamma'' + \gamma)$, resulta que

$$N' = \sqrt{2} \sin(\sqrt{2}t)c_1 - \sqrt{2} \cos(\sqrt{2}t)c_2 + c_3.$$

Por outro lado, devido à segunda equação de (4.40), como $\kappa_g = 1, \tau_g = 0$. Então, usando (4.41), temos

$$N' = \nabla_T N = -\kappa_g T + \tau_g B = -\gamma' = \sqrt{2} \sin(\sqrt{2}t)c_1 - \sqrt{2} \cos(\sqrt{2}t)c_2,$$

portanto $c_3 = 0$. De $|\gamma|^2 = 1$ e $\langle N, \gamma' \rangle = 0, \langle \gamma'' + 2\gamma, \gamma' \rangle = 0$; portanto

$$\langle c_4, c_1 \rangle = \langle c_4, c_2 \rangle = 0.$$

Além disso, $\langle \gamma, \gamma' \rangle = 0$ fornece $\langle \gamma'', \gamma \rangle = -1$, do qual resulta $1 = \langle \gamma'' + 2\gamma, \gamma \rangle = \langle 2c_4, \gamma \rangle$, ou seja, $\langle c_4, c_4 \rangle = \frac{1}{2}$. Por fim, usando $\langle c_4, c_4 \rangle = \frac{1}{2}$ e $\langle \gamma, \gamma \rangle = 1$, concluímos que c_1 é ortogonal a c_2 e $|c_1|^2 = |c_2|^2 = \frac{1}{2}$.

Por último, para verificar que γ é uma geodésica do toro de Clifford, basta calcular γ'' e constatar que suas projeções sobre a base do toro V, W , dada em (4.44), são nulas.

□

Capítulo 5

Superfícies bi-harmônicas em forma espaciais

Neste capítulo é dada a classificação completa das superfícies bi-harmônicas próprias da variedade \mathbb{S}^3 , seguindo o que foi feito em [8] por R. Caddeo, S. Montaldo e C. Oniciuc. Em princípio serão expostos resultados validos para hipersuperfícies da esfera n -dimensional \mathbb{S}^n , posteriormente nos restringiremos ao caso em que $n = 3$.

5.1 Resultados preliminares na esfera \mathbb{S}^n

Seja $N(c)$ uma variedade com curvatura seccional constante c , M^m uma subvariedade de $N(c)$ e $\mathbf{i} : M \rightarrow N(c)$ a inclusão canônica. Denotaremos por \mathbf{II} a segunda forma fundamental da subvariedade $M \subset N(c)$, por \mathbf{S} o operador de forma, por \mathbf{H} o vetor curvatura média de M , por ∇^\perp a conexão normal e por Δ^\perp o Laplaciano generalizado, como definido em (1.45), no fibrado normal de M . Então, valem os resultados que seguem.

Teorema 5.1.1 ([7], [15]). *A aplicação \mathbf{i} é bi-harmônica se e somente se*

$$\begin{cases} -\Delta^\perp \mathbf{H} - \text{tr} \mathbf{II}(-, \mathbf{S}_\mathbf{H} -) + c m \mathbf{H} = 0 \\ 2 \text{tr} \mathbf{S}_{\nabla_{(-)}^\perp \mathbf{H}}(-) + \frac{m}{2} \text{grad}(\|\mathbf{H}\|^2) = 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

Demonstração. Ver [7] e [15]. □

Ressaltamos que na demonstração do Teorema 5.1.1 o campo de bi-tensão de \mathbf{i} é reescrito

na forma

$$\tau_2(i) = -m(\Delta H - m c H). \quad (5.2)$$

O sistema (5.1) foi estudado por B.Y. Chen e S. Ishikawa (para $c = 0$) e por R. Caddeo, S. Montaldo e C. Oniciuc (para $c < 0$), para provar que no caso de superfícies bi-harmônicas de $N^3(c)$, $c \leq 0$, a curvatura média é constante.

Sendo que, toda subvariedade bi-harmônica de curvatura média constante numa variedade com curvatura seccional constante não positiva é harmônica (ver [31]), temos o seguinte resultado.

Teorema 5.1.2 ([7], [15]). *Seja M^2 uma superfície de $N^3(c)$, $c \leq 0$. Então M é bi-harmônica se e somente se é minimal.*

Devido a este resultado e a equação (5.2), segue a não existência de superfícies bi-harmônicas próprias em formas espaciais com $c \leq 0$. Portanto, passaremos a considerar o caso da esfera unitária. Neste caso, do Teorema 5.1.1 segue o seguinte

Corolário 5.1.3. *Seja M^m uma subvariedade de S^n com $\nabla^\perp H = 0$. Então a inclusão \mathbf{i} é bi-harmônica se e somente se*

$$mH = \text{tr II}(-, S_H -).$$

Demonstração. A demonstração segue do sistema (5.1), observando que

$$\text{grad}(\|H\|^2) = \sum (e_i \langle H, H \rangle) e_i = 2 \langle \nabla_{e_i}^\perp H, H \rangle e_i, \quad (5.3)$$

sendo $\{e_i\}$ um referencial local geodésico. □

Proposição 5.1.4. *Seja M uma hipersuperfície de S^n . Então a inclusão \mathbf{i} é bi-harmônica se e somente se*

$$\begin{cases} \Delta^\perp H = (m - \|II\|^2) H \\ 2 \text{tr } S_{\nabla_{(-)}^\perp H}(-) + \frac{m}{2} \text{grad}(\|H\|^2) = 0. \end{cases} \quad (5.4)$$

Demonstração. Basta observar que

$$\text{tr II}(-, S_H -) = \frac{1}{m} (\text{tr } S) \|II\|^2 \eta = \|II\|^2 H,$$

e o resultado segue do Teorema 5.1.1. □

Também, temos a seguinte

Proposição 5.1.5. *Seja*

$$M = \mathbb{S}^m(a) \times \{b\} = \{p = (x_1, \dots, x_{m+1}, b); (x_1)^2 + \dots + (x_{m+1})^2 = a^2, a^2 + b^2 = 1, 0 < a < 1\}$$

uma hipersfera paralela de \mathbb{S}^{m+1} . Então M é uma subvariedade bi-harmônica de \mathbb{S}^{m+1} se e somente se $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $b = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Demonstração. Observe que

$$\Gamma(TM) = \{X = (X_1, \dots, X_{m+1}, 0) \in \mathbb{R}^{m+2} \mid x_1 X_1 + \dots + x_{m+1} X_{m+1} = 0\}.$$

Além disso, indicando por $\xi = (x_1, \dots, x_{m+1}, -\frac{a^2}{b})$, segue que

$$\langle \xi, X \rangle = \langle \xi, p \rangle = 0, \quad \|\xi\|^2 = a^2 + \frac{a^4}{b^2} = c^2, \quad c > 0,$$

e, então, ξ é uma seção do fibrado normal de M em \mathbb{S}^{m+1} . Pondo $\eta = \frac{1}{c}\xi$, da equação (4.41), resulta que

$$\begin{aligned} \nabla_X^{\mathbb{S}^{m+1}} \eta &= \nabla_X^\perp \eta - S_\eta(X) \\ &= \frac{1}{c} \nabla_X^{\mathbb{S}^{m+1}} \xi = \frac{1}{c} (\nabla_X^{\mathbb{R}^{m+2}} \xi + \langle \xi, X \rangle p) \\ &= \frac{1}{c} \nabla_{(X_1, \dots, X_{m+1}, 0)}^{\mathbb{R}^{m+2}} \left(x_1, \dots, x_{m+1}, -\frac{a^2}{b} \right) \\ &= \frac{1}{c} X. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Logo $\nabla_X^\perp \eta = 0$ e $S_\eta = -\frac{1}{c}I$. Portanto, o vetor curvatura média é

$$H = \frac{1}{m} (\text{tr } S_\eta) \eta = -\frac{1}{c} \eta,$$

e conseqüentemente

$$S_H = S_{-\frac{1}{c}\eta} = \frac{1}{c^2} I.$$

Do Corolário 5.1.3 concluímos que M é bi-harmônica se e somente se $c^2 = 1$, ou seja, se e somente se $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $b = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. \square

5.2 Superfícies bi-harmônicas da esfera \mathbb{S}^3

A partir de agora, restringiremos nossa atenção as superfícies da esfera tridimensional \mathbb{S}^3 . Da Proposição 5.1.5 vemos que $M = \mathbb{S}^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times \left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$ é uma superfície bi-harmônica não harmônica de \mathbb{S}^3 .

Na Seção 4.5 vimos que curvas bi-harmônicas próprias de \mathbb{S}^3 devem ter curvatura geodésica constante não nula. O teorema que segue mostra que o mesmo vale para a norma do vetor curvatura média de superfícies bi-harmônicas não harmônicas de \mathbb{S}^3 .

Teorema 5.2.1 ([8]). *Seja M uma superfície de \mathbb{S}^3 . Então M é uma subvariedade bi-harmônica não harmônica se e somente se $\|\mathbf{H}\|$ é constante não nula e $\|\mathbf{II}\|^2 = 2$.*

Demonstração. Suponha que M seja uma subvariedade de \mathbb{S}^3 bi-harmônica. Seja $\{e_1, e_2\}$ uma base local de campos de vetores ortonormais em M e seja η um campo vetores unitário normal. Escrevemos o vetor curvatura média na forma $\mathbf{H} = f\eta$, onde $f \in C^\infty(M)$ e $f > 0$. Neste caso o sistema (5.4) se torna

$$\begin{cases} -\Delta^M f = (2 - \|\mathbf{S}_\eta\|^2)f, \\ \mathbf{S}_\eta(\text{grad } f) + f \text{grad } f = 0. \end{cases} \quad (5.6)$$

De fato, como M é uma hipersuperfície temos $\|\mathbf{S}_\eta\|^2 = \|\mathbf{II}\|^2$ e, além disso,

$$\begin{aligned} \nabla^\perp \mathbf{H} &= -\sum_i (\nabla_{e_i}^\perp \nabla_{e_i}^\perp) f \eta \\ &= -\sum_i e_i(e_i(f))\eta + 2e_i(f)\nabla_{e_i}^\perp \eta + f\nabla_{e_i}^\perp \nabla_{e_i}^\perp \eta. \end{aligned}$$

Como $\nabla_{e_i}^\perp \eta = 0$, pela equação (1.7) obtemos a primeira equação do sistema (5.6). Quanto à segunda equação de (5.6), temos que

$$\sum_i \mathbf{S}_{\nabla_{e_i}^\perp \mathbf{H}} e_i = \mathbf{S}_\eta(e_i(f)e_i) + \mathbf{S}_{\nabla_{e_i}^\perp \eta} e_i$$

e, então, o resultado segue de (1.3) e de $\nabla_{e_i}^\perp \eta = 0$.

Considere agora $U = \{p \in M \mid (\text{grad } f)(p) \neq 0\}$. Mostraremos que $U = \emptyset$. Para isto, assumimos que $U \neq \emptyset$ e fazemos $e_1 = \frac{\text{grad } f}{\|\text{grad } f\|}$. Como e_1 e e_2 são ortogonais, temos

$$e_2 f = 0, \quad \text{grad } f = (e_1 f)e_1. \quad (5.7)$$

Segue que

$$\langle \mathbf{II}(e_1, e_1), \eta \rangle = \langle \mathbf{S}_\eta(e_1), e_1 \rangle = \langle -f e_1, e_1 \rangle = -f$$

e

$$\langle \mathbf{II}(e_1, e_2), \eta \rangle = \langle \mathbf{S}_\eta(e_1), e_2 \rangle = \langle -f e_1, e_2 \rangle = 0.$$

Usando $2\mathbf{H} = \mathbf{II}(e_1, e_1) + \mathbf{II}(e_2, e_2)$, temos que

$$\mathbf{II}(e_1, e_1) = -f\eta, \quad \mathbf{II}(e_1, e_2) = 0, \quad \mathbf{II}(e_2, e_2) = 3f\eta, \quad (5.8)$$

e então

$$\|S_\eta\|^2 = 10f^2. \quad (5.9)$$

Denotaremos por $\{\omega_1, \omega_2\}$ as 1-formas duais a $\{e_1, e_2\}$ e por ω_i^j as 1-formas da conexão dadas por $\nabla_{(-)}e_i = \omega_i^j(-)e_j$, Vamos calcular e_2f e e_1f . Como \mathbb{S}^3 possui curvatura seccional constante e M é uma hipersuperfície, as equações de Codazzi nos dão

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \nabla_{e_1}^{\mathbb{S}^3} \Pi(e_2, e_1), \eta \rangle - \langle \Pi(\nabla_{e_1} e_2, e_1), \eta \rangle - \langle \Pi(e_2, \nabla_{e_1} e_1), \eta \rangle \\ &- \langle \nabla_{e_2}^{\mathbb{S}^3} \Pi(e_1, e_1), \eta \rangle + \langle \Pi(\nabla_{e_2} e_1, e_1), \eta \rangle + \langle \Pi(e_1, \nabla_{e_2} e_1), \eta \rangle \\ &= \omega_2^1(e_1)f - 3f\omega_1^2(e_1) + e_2(f) + f\langle \nabla_{e_2}^{\mathbb{S}^3} \eta, \eta \rangle - 2\omega_1^1(e_2)f \end{aligned} \quad (5.10)$$

e

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \nabla_{e_1}^{\mathbb{S}^3} \Pi(e_2, e_2), \eta \rangle - \langle \Pi(\nabla_{e_1} e_2, e_2), \eta \rangle - \langle \Pi(e_2, \nabla_{e_1} e_2), \eta \rangle \\ &- \langle \nabla_{e_2}^{\mathbb{S}^3} \Pi(e_1, e_2), \eta \rangle + \langle \Pi(\nabla_{e_2} e_1, e_2), \eta \rangle + \langle \Pi(e_1, \nabla_{e_2} e_2), \eta \rangle \\ &= 3e_1(f) + 3f\langle \nabla_{e_1}^{\mathbb{S}^3} \eta, \eta \rangle - 6f\omega_2^2(e_1) + 3f\omega_1^2(e_2) - f\omega_2^1(e_2). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Observando que $\omega_j^i = -\omega_i^j$, resulta

$$e_2f = -4f\omega_2^1(e_1), \quad 3e_1f = -4f\omega_1^2(e_2). \quad (5.12)$$

Usando (5.7) e (5.12) vemos que $\omega_2^1(e_1) = 0$ e, conseqüentemente, $d\omega_1 = 0$. Portanto (localmente) ω_1 é exata, isto é, $\omega_1 = du$ para alguma função u . Como $df = (e_1f)\omega_1 + (e_2f)\omega_2$ e $e_2f = 0$, temos que $df \wedge \omega^1 = 0$, portanto, f é uma função apenas de u . Denotando por f' e f'' a primeira e a segunda derivadas de f com respeito a u , a segunda fórmula de (5.12) implica em

$$4f\omega_1^2 = -3f'\omega^2. \quad (5.13)$$

Novamente, (5.7) e (5.12) nos dão

$$\begin{aligned} -4f\Delta^M f &= \omega_2^1(e_2)e_1(f) - 4f(e_1(e_1(f))) \\ &= 3f'^2 - 4ff'' \end{aligned} \quad (5.14)$$

e, da primeira equação do sistema (5.6) e (5.9), obtemos

$$4ff'' - 3f'^2 + 8f^2 - 40f^4 = 0. \quad (5.15)$$

Pondo $(f')^2 = y$ e usando que $f' \neq 0$, de (5.15) segue que

$$2f \frac{dy}{df} - 3y = 40f^4 - 8f^2, \quad (5.16)$$

que implica (ver, por exemplo, [5])

$$f'^2 = 8f^4 - 8f^2 + Cf^{\frac{3}{2}}, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (5.17)$$

Por outro lado, a equação de Gauss nos dá que a curvatura Gaussiana é dada por:

$$K = 1 + \det S_\eta$$

e

$$\begin{cases} K = 1 - 3f^2, \\ d\omega_1^2 = -K\omega^1 \wedge \omega^2. \end{cases} \quad (5.18)$$

De (5.8), (5.13) e (5.18), obtemos

$$4ff'' - 7f'^2 + 16f^4 - \frac{16}{3}f^2 = 0, \quad (5.19)$$

logo (5.15) e (5.19), implicam em

$$f'^2 = 14f^4 - \frac{10}{3}f^2. \quad (5.20)$$

As condições (5.17) e (5.20) juntas dizem que f deve satisfazer uma equação polinomial com coeficientes constantes, ou seja, f é constante. Portanto, M possui curvatura média constante e $\|S_\eta\|^2 = \|\text{II}\|^2 = 2$.

A outra parte da equivalência segue imediatamente do sistema (5.4). \square

A seguir, vamos provar o teorema que classifica as superfícies $M^2 \subset \mathbb{S}^3$ de curvatura média constante e $\|\text{II}\|^2 = 2$. Faremos a demonstração de acordo com [8]. Ressaltamos que este teorema foi provado também por Z.H Hou em [25], com um diferente método.

Teorema 5.2.2. *Seja M uma hipersuperfície com curvatura média constante e $\|\text{II}\|^2 = 2$.*

- (a) *Se M não é compacta, então é localmente parte de uma hiperesfera $\mathbb{S}^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ou de um toro de Clifford.*
- (b) *Se M é compacta e orientável, então M é ou uma hiperesfera $\mathbb{S}^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ou um toro de Clifford.*

Demonstração. Primeiro mostraremos que se $\|\text{H}\| = \text{constante}$ e $\|\text{II}\|^2 = 2$, então, os autovalores do operador de forma de $M \subset \mathbb{S}^3$ são ou $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$ ou $\lambda_1 = -\lambda_2 = \pm 1$.

Supomos $\|\text{H}\| = \text{constante} > 0$. Seja $\eta = \frac{\text{H}}{\|\text{H}\|}$ uma seção unitária global no fibrado $T^\perp M$. Denotamos por $\lambda_1(p)$, $\lambda_2(p)$ os autovalores de S_η em um ponto $p \in M$. De $\|\text{H}\| = \text{constante}$ e $\|\text{II}\| = \text{constante}$ resulta que λ_1 , λ_2 são funções constantes sobre M , podemos supor que $\lambda_1 \leq \lambda_2$. Nestas condições dois casos devem ser considerados.

1. $\lambda_1 = \lambda_2 (= \pm 1)$.

Neste caso M é umbílica em \mathbb{S}^3 , logo é (uma parte de) $\mathbb{S}^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

2. $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Seja $\{e_1, e_2\}$ uma base local ortonormal tal que

$$S_\eta(e_1) = \lambda_1 e_1 \quad \text{e} \quad S_\eta(e_2) = \lambda_2 e_2.$$

Consideramos ω_1, ω_2 as 1-formas duais à base $\{e_1, e_2\}$ e ω_i^j as 1-formas da conexão como no teorema anterior. Da equação de Codazzi (para o caso de formas espaciais) temos

$$\nabla_{e_1} S_\eta(e_2) - \nabla_{e_2} S_\eta(e_1) = S_\eta([e_1, e_2]).$$

Como

$$[e_1, e_2] = \nabla_{e_1} e_2 - \nabla_{e_2} e_1 = \omega_2^1(e_1)e_1 - \omega_1^2(e_2)e_2,$$

obtemos

$$\lambda_2 \omega_2^1(e_1)e_1 - \lambda_1 \omega_1^2(e_2)e_2 = \lambda_1 \omega_2^1(e_1)e_1 - \lambda_2 \omega_1^2(e_2)e_2.$$

Utilizando a condição $\lambda_1 \neq \lambda_2$, concluímos que $\omega_1^2 = 0$. Da segunda equação do sistema (5.18) segue que $K = 0$ e, como $K = 1 + \lambda_1 \lambda_2$, resulta que $\lambda_1 \lambda_2 = -1$. Usando $\|II\|^2 = 2$, obtemos $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 1$ e, conseqüentemente, $\|H\| = 0$, contradizendo $\|H\| = \text{constante} > 0$.

Supomos, agora, que $\|H\| = 0$. Seja η uma seção local unitária do fibrado normal M em \mathbb{S}^3 . Desta vez, λ_1 e λ_2 são contínuas no domínio do sistema de coordenadas locais U . Como $H = 0$ e $\|II\|^2 = 2$ temos que $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 1$. Se M é orientável, então η está definida em toda M , e o mesmo vale para λ_1 e λ_2 . Utilizamos, então, o Teorema 4.8 de [17] para garantir que M é o (uma parte do) toro de Clifford.

□

Segue da Observação 1.2.6 que o toro de Clifford $\mathbb{S}^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times \mathbb{S}^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ é uma superfície harmônica de \mathbb{S}^3 , de forma que, devido aos Teoremas 5.2.1 e 5.2.2, podemos estabelecer o seguinte resultado:

Teorema 5.2.3. *Seja M uma superfície bi-harmônica própria de \mathbb{S}^3 .*

(a) *Se M não é compacta, então M é localmente $\mathbb{S}^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \subset \mathbb{S}^3$.*

(b) Se M é compacta e orientável, então $M = \mathbb{S}^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Terminaremos este capítulo observando que no caso de dimensão maior, não se sabe se existem subvariedades bi-harmônicas próprias de $N^n(c)$, $n > 3$, $c \leq 0$. Contudo, foram provados os seguintes resultados:

1. Toda curva bi-harmônica de \mathbb{R}^n é um segmento aberto de reta (ver [19]).
2. Seja M^3 uma hipersuperfície de \mathbb{R}^4 . Então M é bi-harmônica se e somente se é mínima (ver [24]).
3. Seja M uma subvariedade de \mathbb{S}^n . Então M é bi-harmônica em \mathbb{R}^{n+1} se e somente se é mínima em \mathbb{R}^{n+1} (ver [16]).

Bibliografia

- [1] G.B. Airy. On the strains in the interior of beams. *Philos. Trans. R. Soc. London Ser. A*, 153 (1863), 49–79.
- [2] M. Bekkar. Exemples de surfaces minimales dans l'espace de Heisenberg. *Rem. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari* 61 (1991), no. 2, 123-130.
- [3] L. Bianchi. Gruppi continui e finiti. Ed. Zanichelli, Bologna (1928).
- [4] W. Boothby. An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry. Academic Press (1986).
- [5] W.E. Boyce, R. C. DiPrima. Elementary differential equations. Jonh Wiley & Sons, Inc. (2000).
- [6] R. Caddeo, A. Gray. Curve e Superfici, Vol. I, Ed. CUEC. Cagliari (1996).
- [7] R. Caddeo, S. Montaldo, C. Oniciuc. Biharmonic submanifolds in spheres. *Israel J. Math.* 130 (2002), 109–123.
- [8] R. Caddeo, S. Montaldo, C. Oniciuc. Biharmonic submanifolds of S^3 . *Int. J. Math.*, 12 (2001), 867-876.
- [9] R. Caddeo, S. Montaldo, C. Oniciuc, P. Piu. The classification of biharmonic curves of Cartan-Vranceanu 3-dimensional spaces. *Modern Trends in Geometry and Topology* (2005), 121–131.
- [10] R. Caddeo, S. Montaldo, C. Oniciuc, P. Piu. The Euler-Lagrange method for biharmonic curves. *Mediterranean Journal of Mathematics* (2006), 449–465.

-
- [11] R. Caddeo, S. Montaldo, P. Piu. Biharmonic curves on a surface. *Rend. Mat. Appl.* 21 (2001), 143–157.
- [12] R. Caddeo, C. Oniciuc, P. Piu. Explicit formulas for non-geodesic biharmonic curves of the Heisenberg group. *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino* 62 (2004), 265–277.
- [13] R. Caddeo, L. Vanhecke. Does “ $\Delta^2 d^{2-n} = 0$ on a Riemannian manifold” implies flatness? *Period. Math. Hungar.* 17 (1986), 109–117.
- [14] É. Cartan. *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*. Gauthier Villars, Paris (1946).
- [15] B.Y. Chen, S. Ishikawa. Biharmonic pseudo-Riemannian submanifolds in pseudo-Euclidean spaces. *Kyushu J. Math.*, 52 (1998), 167–185.
- [16] B.Y. Chen. Some open problems and conjectures on submanifolds of finite type. *Soochow J. Math.*, 17 (1986), 109–117.
- [17] M. Dajczer. *Submanifolds and Isometric Immersions*. Mathematics Lecture Series 13, Publish or Perish (1990).
- [18] C. Delaunay. Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante. *J. Math. pures et appl. Sér.1* 6 (1869), 309–320.
- [19] I. Dimitric. Submanifolds of \mathbb{E}^m with biharmonic mean curvature vector. *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica* 20 (1992), 53–65.
- [20] M.P. do Carmo, M. Dajczer. Helicoidal surfaces with constant mean curvature. *Tôhoku Math. J.* 34, (1982), 425–435.
- [21] J. Eells, L. Lemaire. *Selected topics in harmonic maps*, CBMS, 50, Amer. Math. Soc, (1983).
- [22] J. Eells, J.H. Sampson. Harmonic mappings of Riemannian manifolds. *Amer. J. Math.* 86 (1964).
- [23] G. Fubini, Sugli spazi che ammettono un gruppo continuo di movimenti. *Ann. di Matem.* Tomo 8, serie III, (1903), 39–82.
- [24] T. Hasanis, T. Vlachos. Hypersurfaces in E^4 with constante mean curvature vector field. *Math. Nachr.* 172 (1995), 145–169.

-
- [25] Z.H. Hou. Hypersurfaces in sphere with constante mean curvature. *Proc. Amer. Math. Soc.* 125 (1997), 109–160.
- [26] G.Y. Jiang. 2-harmonic isometric immersions between Riemannian manifolds. *Chinese Ann. Math. Ser. A* 7 (1986), 130–144.
- [27] G.Y. Jiang. 2-harmonic maps and their first and second variation formulas. *Chinese Ann. Math. Ser. A* 7 (1986), 389–402.
- [28] D. Laugwitz. Differential and Riemannian geometry. Academic Press, (1965).
- [29] J.C. Maxwell. On reciprocal diagrams in space, and their relation to Airy's function of stress. *Proc. London. Math. Soc.* 2 (1868), 102–105.
- [30] C. Mei. Curve bimoniche con Euler-Lagrange, Tesi di Laurea, Università di Cagliari, (2004).
- [31] C. Oniciuc. Biharmonic maps between Riemannian manifolds. *An. Stiint. Univ. Al.I. Cuza Iasi Mat.* (N.S.), 48 (2002), 237-248.
- [32] P. Piu. Sur certains types de distributions non-intégrables totalement géodésiques. Thèse de Doctorat, Université de Haute-Alsace, Mulhouse (1988).
- [33] L. Sario, M. Nakai, C. Wang, L. Chung. Classification theory of Riemannian manifolds. Harmonic, quasiharmonic and biharmonic functions. *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 605. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977.
- [34] H. Urakawa. Calculus of Variations and Harmonic Maps, Amer. Math. Soc, Providence, RI (1993).
- [35] G. Vranceanu. Leçons de géométrie différentielle. Ed. Acad. Rep. Pop. Roum., vol. I, Bucarest (1957).