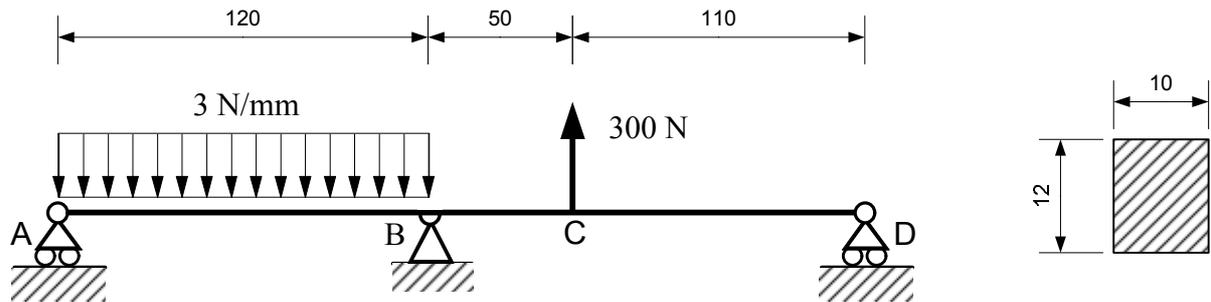


ESERCIZI SVOLTI O CON TRACCIA DI SOLUZIONE SU

STRUTTURE IPERSTATICHE

PROVA SCRITTA 11 gennaio 2013 - Esercizio 2

Data la struttura di figura, ricavare le equazioni delle azioni interne (M, N, T) e tracciarne i diagrammi.
Materiale: lega di alluminio ($E = 210 \text{ GPa}$).



Struttura una volta iperstatica ($GdL=3$; $GdV=4$), non labile.
La risoluzione della struttura verrà utilizzato il Principio dei Lavori Virtuali.

CALCOLI PRELIMINARI

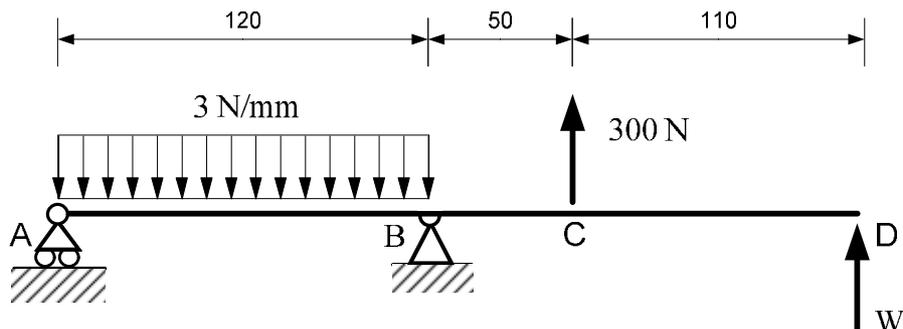
Area e momento di inerzia della sezione circolare piena.

$$A = 10 \cdot 12 = 120 \text{ mm}^2$$

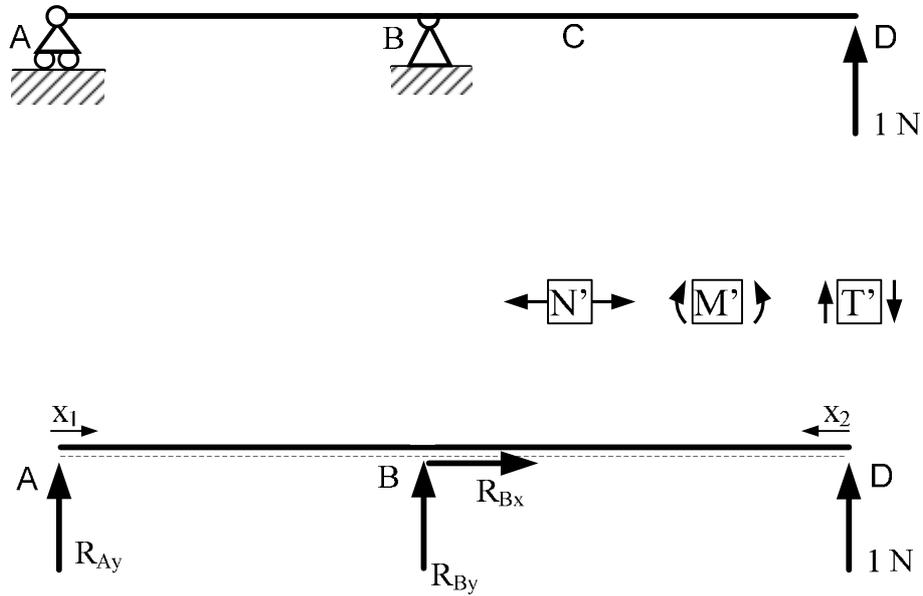
$$J = \frac{1}{12} \cdot 10 \cdot 12^3 = 1440 \text{ mm}^4$$

STRUTTURA ISOSTATICA ASSOCIATA

Nella scelta della struttura isostatica associata si è deciso di eliminare il grado di vincolo fornito dal carrello in D, sostituendolo quindi con la reazione iperstatica W (la seguente struttura è una struttura isostatica e non labile).



RISOLUZIONE DEL SISTEMA DELLE FORZE

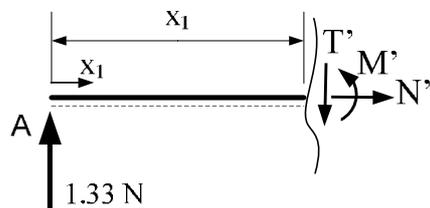


Calcolo delle reazioni vincolari necessarie.

$$\curvearrowright_B) R_{Ay} \cdot 120 - 1 \cdot 160 = 0 \quad \text{da cui} \quad R_{Ay} = 1.33 \text{ N}$$

Calcolo delle azioni interne.

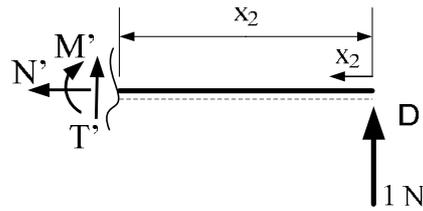
$$0 \leq x_1 \leq 120$$



$$N' = 0$$

$$M' - 1.33 \cdot x_1 = 0 \quad \text{da cui} \quad M' = 1.33 \cdot x_1$$

$$0 \leq x_2 \leq 160$$

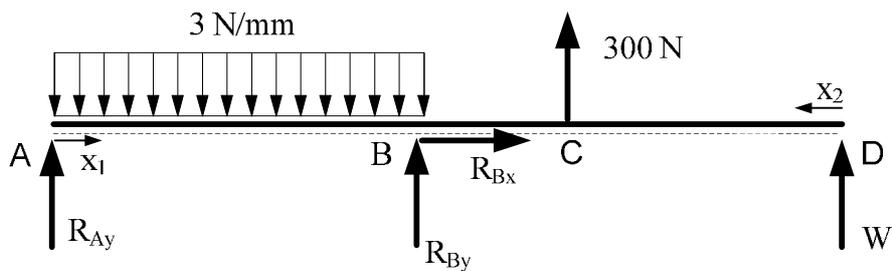
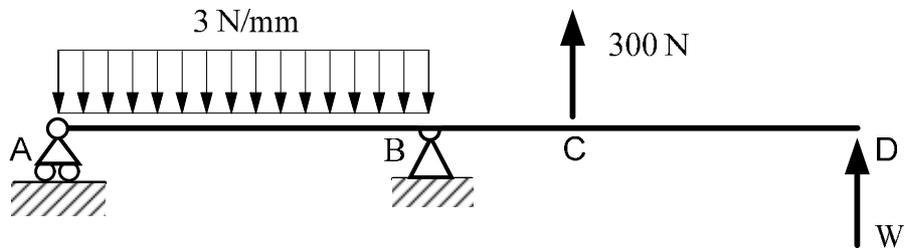


$$N' = 0$$

$$M' - 1 \cdot x_2 = 0$$

$$M' = x_2$$

RISOLUZIONE DEL SISTEMA DEGLI SPOSTAMENTI

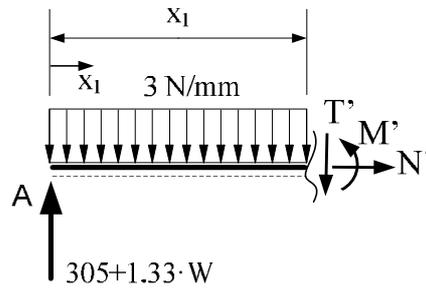


Calcolo delle reazioni vincolari necessarie.

$$\sum \mathcal{U}_B) R_{Ay} \cdot 120 - 3 \cdot \frac{120^2}{2} - 300 \cdot 50 - W \cdot 160 = 0 \quad \text{da cui} \quad R_{Ay} = 305 + 1.33 \cdot W$$

Calcolo delle azioni interne.

$$0 \leq x_1 \leq 120$$



$$N = 0$$

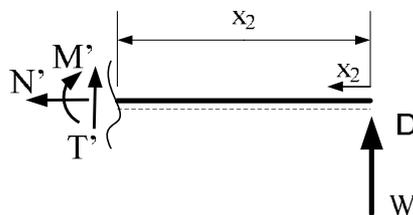
$$M - (305 + 1.33 \cdot W) \cdot x_1 + 3 \cdot \frac{x_1^2}{2} = 0$$

$$M = (305 + 1.33 \cdot W) \cdot x_1 - 1.5 \cdot x_1^2$$

$$T - (305 + 1.33 \cdot W) + 3 \cdot x_1 = 0$$

$$T = (305 + 1.33 \cdot W) - 3 \cdot x_1$$

$$0 \leq x_2 \leq 110$$



$$N = 0$$

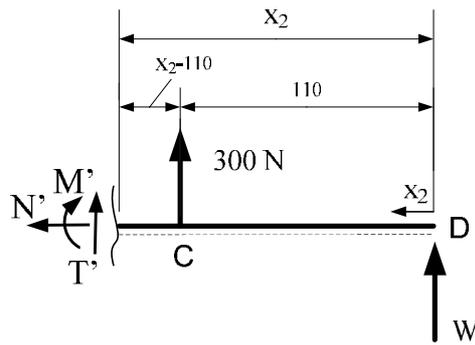
$$M - W \cdot x_2 = 0$$

$$M = W \cdot x_2$$

$$T - W = 0$$

$$T = W$$

$$110 \leq x_2 \leq 160$$



$$N = 0$$

$$M - W \cdot x_2 - 300 \cdot (x_2 - 110) = 0 \quad \text{da cui} \quad M = W \cdot x_2 + 300 \cdot x_2 - 33000$$

$$T + W + 300 = 0 \quad \text{da cui} \quad T = -(W + 300)$$

INTEGRALE RELATIVO AL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI
PER IL CALCOLO DELL'INCOGNITA IPERSTATICA

$$0 = \int_0^l N' \cdot N \cdot \frac{dx}{EA} + \int_0^l M' \cdot M \cdot \frac{dx}{EJ}$$

$$EJ = 3.024 \cdot 10^8 \text{ N} \cdot \text{mm}^2$$

Dato che nella struttura è presente solo momento (ed il taglio viene trascurato, in quanto la struttura è snella), saranno nulli tutti gli integrali relativi all'azione normale.

$$0 = \int_0^{120} (1.33 \cdot x_1) \cdot [(305 + 1.33 \cdot W) \cdot x_1 - 1.5 \cdot x_1] \cdot \frac{dx_1}{3.024 \cdot 10^8} +$$

$$+ \int_0^{110} x_2 \cdot (W \cdot x_2) \cdot \frac{dx_2}{3.024 \cdot 10^8} + \int_{110}^{160} x_2 \cdot (W \cdot x_2 + 300 \cdot x_2 - 33000) \cdot \frac{dx_2}{3.024 \cdot 10^8}$$

Svolgendo i calcoli si ottiene il seguente valore dell'iperstatica W.

$$W = -77.14 \text{ N}$$

Essendo di segno negativo, significa che il verso è opposto a quello scelto arbitrariamente per l'incognita iperstatica nell'isostatica associata.

Sostituendo tale valore (con il segno) nelle equazioni già scritte per le azioni interne del sistema degli spostamenti, si ottengono le equazioni definitive delle azioni interne per questa struttura.

$$0 \leq x_1 \leq 120$$

$$N = 0$$

$$M = 202.17 \cdot x_1 - 1.5 \cdot x_1^2$$

$$T = 202.17 - 3 \cdot x_1$$

Calcolo di alcuni valori per il tracciamento dei diagrammi delle azioni interne. Di seguito, i valori del momento e del taglio agli estremi dell'intervallo.

$$T(0) = 0 \text{ N} \quad T(120) = 157.83 \text{ N}$$

$$M(0) = 0 \quad M(120) = 2658 \text{ Nmm}$$

Essendo il momento parabolico, è necessario verificare se abbia un massimo. Si valuta quindi se il taglio si annulli in qualche punto dell'intervallo.

$$T = 0 \quad \text{per} \quad x_1 = 67.39 \text{ mm}$$

Il diagramma del momento ha quindi un punto a derivata nulla (cioè di massimo o di minimo) nel punto appena calcolato ($x_1 = 67.39 \text{ mm}$), ed il suo valore è pari al seguente.

$$M(67.39) = M_{\max} = 6812.12 \text{ Nmm}$$

$$0 \leq x_2 \leq 110$$

$$N = 0$$

$$M = -77.14 \cdot x_2 \quad M(0) = 0 \quad M(110) = -8485.4 \text{ Nmm}$$

$$T = 77.14 \text{ N}$$

$$110 \leq x_2 \leq 160$$

$$N = 0$$

$$M = 222.86 \cdot x_2 - 33000 \quad M(110) = -8485.4 \text{ Nmm} \quad M(160) = 2658 \text{ Nmm}$$

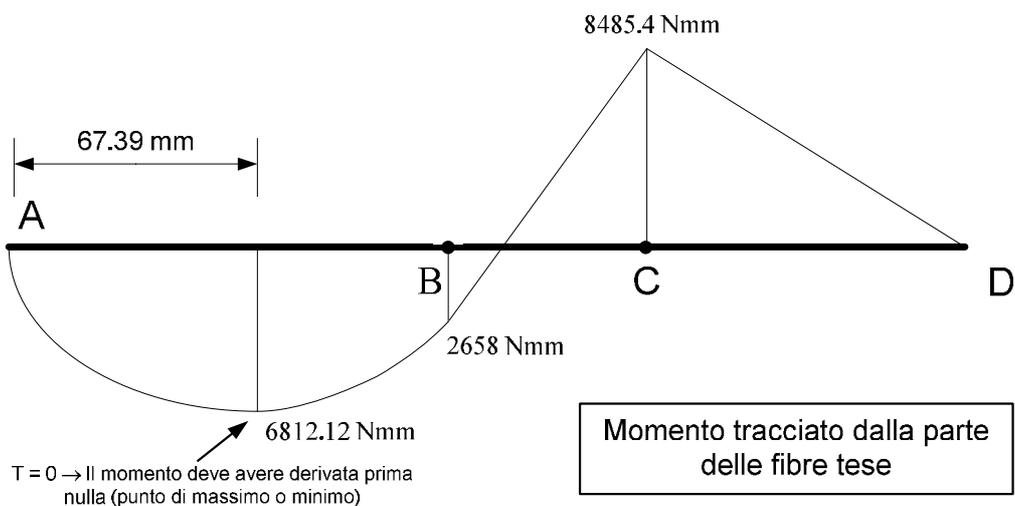
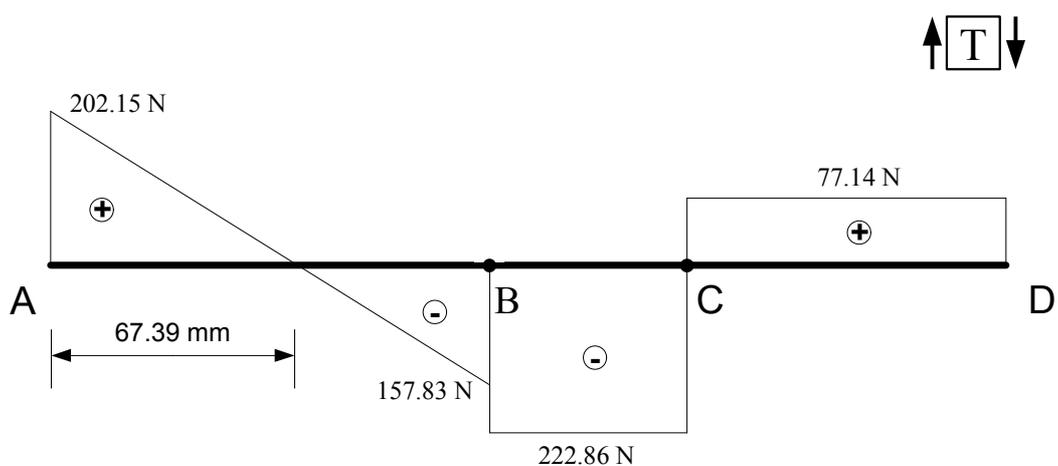
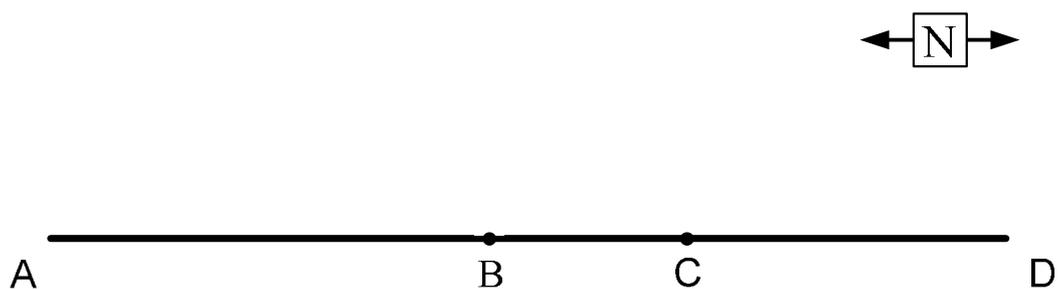
$$T = -222.86 \text{ N}$$

Nella pagina seguente sono riportati i diagrammi delle azioni interne per la struttura. Su tali diagrammi si possono fare alcune osservazioni:

- il momento nelle cerniere A e D è nullo;
- il diagramma del momento non presenta salti, non essendoci coppie applicate;
- nel punto C, dove è applicata una forza concentrata, il diagramma del taglio presenta un salto pari al valore della forza applicata (300 N);
- nel punto B, dove è presente una cerniera a terra, il diagramma del taglio presenta un salto. Questo è dovuto alla presenza della reazione verticale del vincolo (non calcolata in questo esercizio) ed il salto deve essere pari a tale valore. Se tale cerniera avesse una reazione orizzontale diversa da zero, si avrebbe un salto nell'azione normale pari al valore di tale componente. In conclusione, se si calcolassero le reazioni vincolari a terra della cerniera B, ci si dovrebbe aspettare una componente orizzontale nulla ed una componente verticale pari a 65.03 N.
- nel tratto AB (soggetto ad un carico distribuito di valore costante) il momento è parabolico, il taglio varia linearmente, ed il momento ha un massimo o minimo nel punto in cui il taglio è nullo;
- nei tratti BC e CD il momento varia linearmente ed il taglio è costante.

Tutte queste osservazioni indicano come i diagrammi delle azioni interne siano coerenti con lo schema statico della struttura originaria.

DIAGRAMMI DELLE AZIONI INTERNE (M, N, T) DELLA STRUTTURA

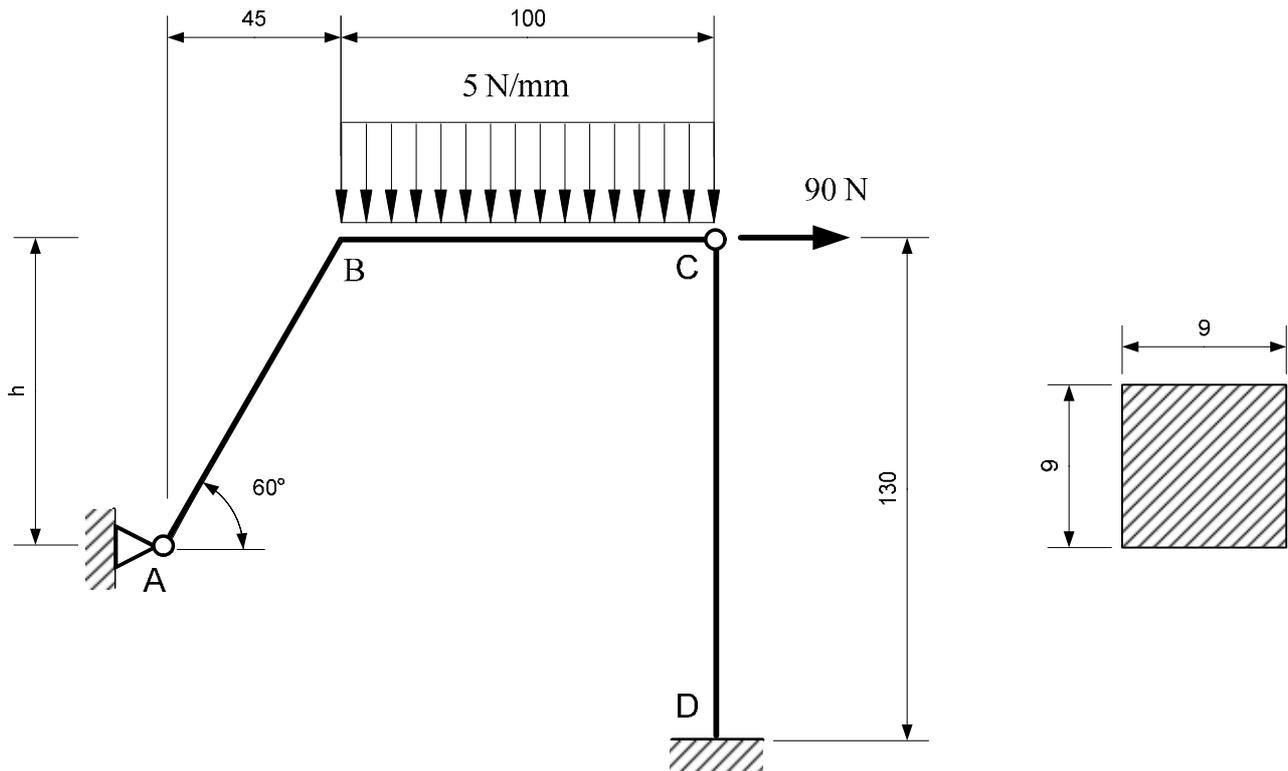


$T = 0 \rightarrow$ Il momento deve avere derivata prima nulla (punto di massimo o minimo)

Momento tracciato dalla parte delle fibre tese

PROVA SCRITTA 5 giugno 2013 - Esercizio 2

Data la struttura di figura in acciaio ($E = 210 \text{ GPa}$), si richiede :
- il tracciamento dei diagrammi delle azioni interne;
- il calcolo del massimo sforzo τ nella struttura.



Struttura una volta iperstatica ($GdL=6$; $GdV=7$), non labile.
Per la risoluzione della struttura verrà utilizzato il Principio dei Lavori Virtuali.

CALCOLI PRELIMINARI

Area e momento di inerzia della sezione quadrata piena.

$$A = 9 \cdot 9 = 81 \text{ mm}^2$$

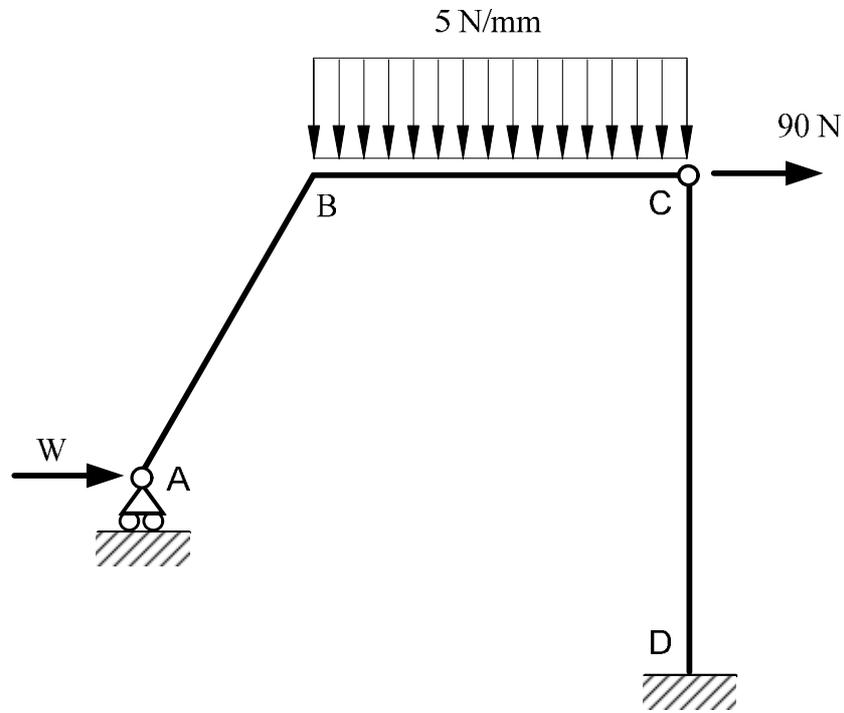
$$J = \frac{1}{12} \cdot 9 \cdot 9^3 = 546.75 \text{ mm}^4$$

$$h = 45 \cdot \tan 60^\circ = 77.9 \text{ mm}$$

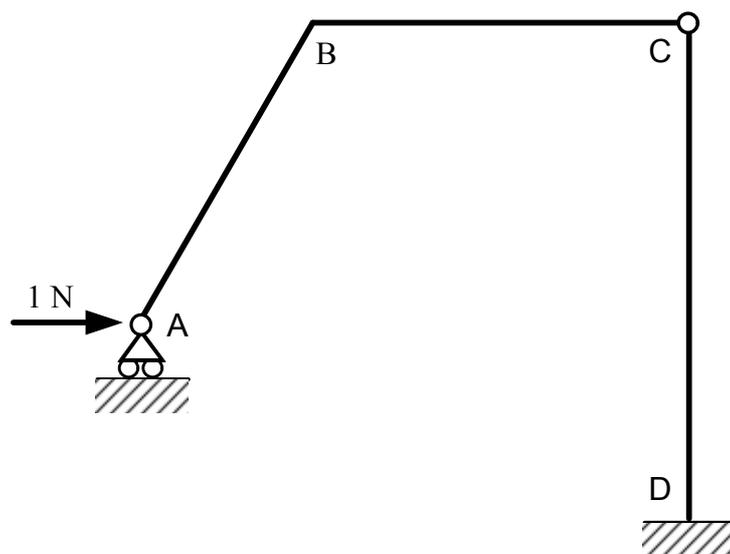
$$AB = \frac{45}{\cos 60^\circ} = 90 \text{ mm}$$

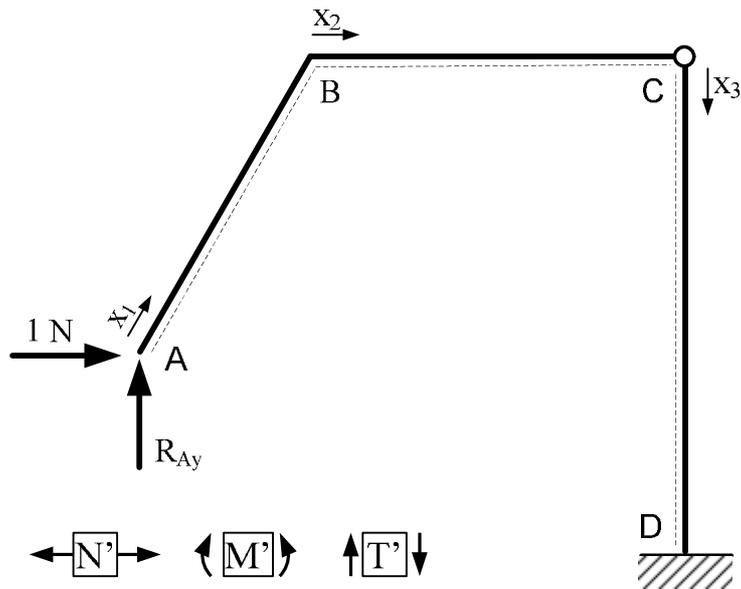
STRUTTURA ISOSTATICA ASSOCIATA E SISTEMA DEGLI SPOSTAMENTI

Nella scelta della struttura isostatica associata, che in questo caso coincide con il sistema degli spostamenti, si è deciso di eliminare come grado di vincolo lo spostamento orizzontale impedito dalla cerniera in A in direzione orizzontale, trasformandola quindi in un carrello con piano di scorrimento orizzontale ed inserendo la reazione iperstatica W . La seguente struttura è una struttura isostatica e non labile.



RISOLUZIONE DEL SISTEMA DELLE FORZE



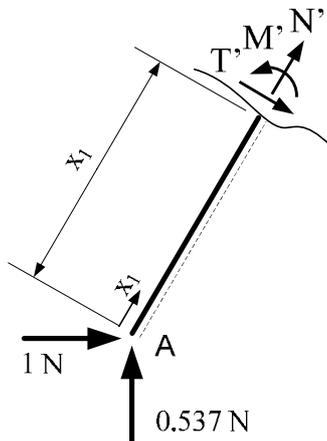


Calcolo delle reazioni vincolari necessarie.
 Equilibrio alla rotazione dell'asta AC con polo in C.

$$\vartheta_C) R_{Ay} \cdot (45 + 100) - 1 \cdot 77.9 = 0 \quad R_{Ay} = 0.537 \text{ N}$$

Calcolo delle azioni interne.

$$0 \leq x_1 \leq 90$$



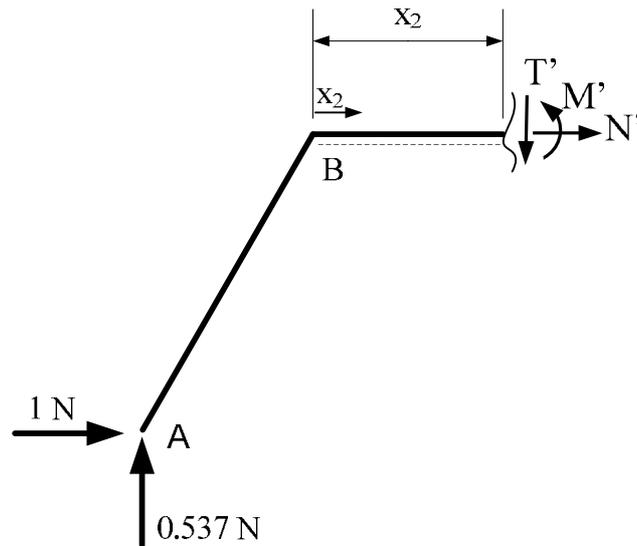
$$N' + 1 \cdot \cos 60^\circ + 0.537 \cdot \sin 60^\circ = 0$$

$$N' = -0.965 \text{ N}$$

$$M' + 1 \cdot \sin 60^\circ \cdot x_1 - 0.537 \cdot \cos 60^\circ \cdot x_1 = 0$$

$$M' = -0.598 \cdot x_1$$

$$0 \leq x_2 \leq 100$$



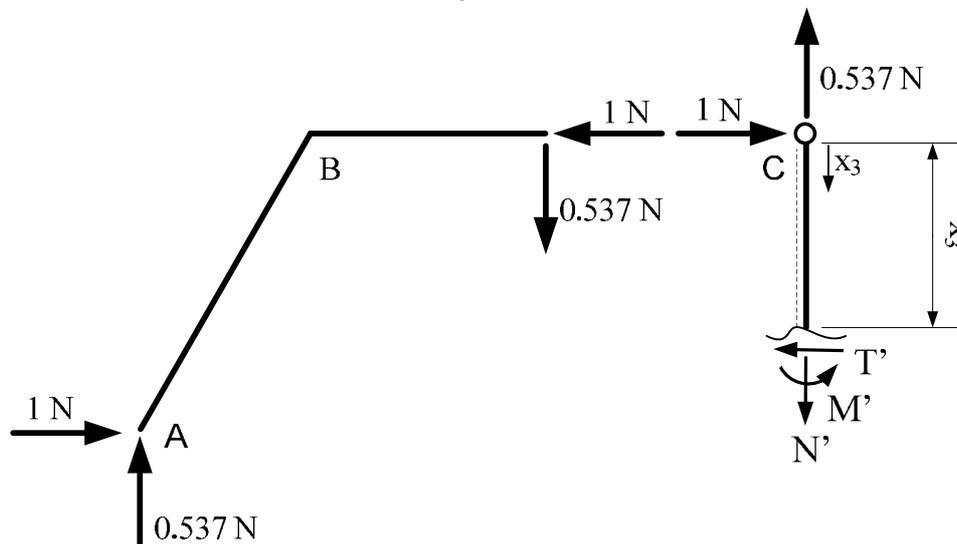
$$N' + 1 = 0$$

$$N' = -1 \text{ N}$$

$$M' + 1 \cdot 77.9 - 0.537 \cdot (x_2 + 45) = 0$$

$$M' = 0.537 \cdot x_2 - 57.3$$

$$0 \leq x_3 \leq 130$$



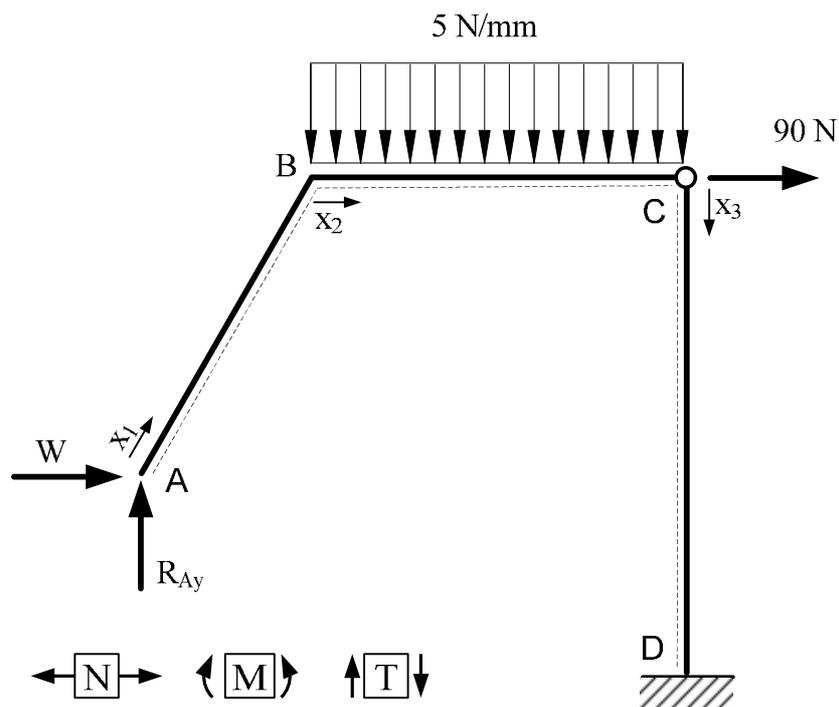
$$N' - 0.537 = 0$$

$$N' = 0.537 \text{ N}$$

$$M' - 1 \cdot x_3 = 0$$

$$M' = x_3$$

RISOLUZIONE DEL SISTEMA DEGLI SPOSTAMENTI

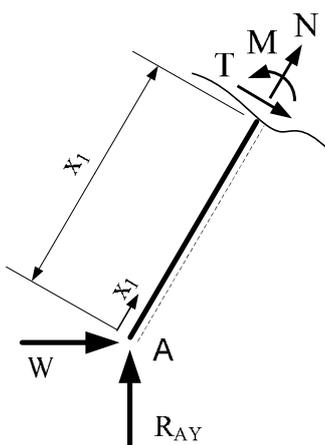


Calcolo delle reazioni vincolari necessarie.

$$\vartheta_C) R_{Ay} \cdot (45 + 100) - W \cdot 77.9 - 5 \cdot 100 \cdot 50 = 0 \qquad R_{Ay} = \frac{77.9 \cdot W + 25000}{145}$$

Calcolo delle azioni interne.

$$0 \leq x_1 \leq 90$$



$$N + W \cdot \cos 60^\circ + R_{Ay} \cdot \sin 60^\circ = 0$$

$$N = -W \cdot 0.5 - \frac{77.9 \cdot W + 25000}{145} \cdot 0.866$$

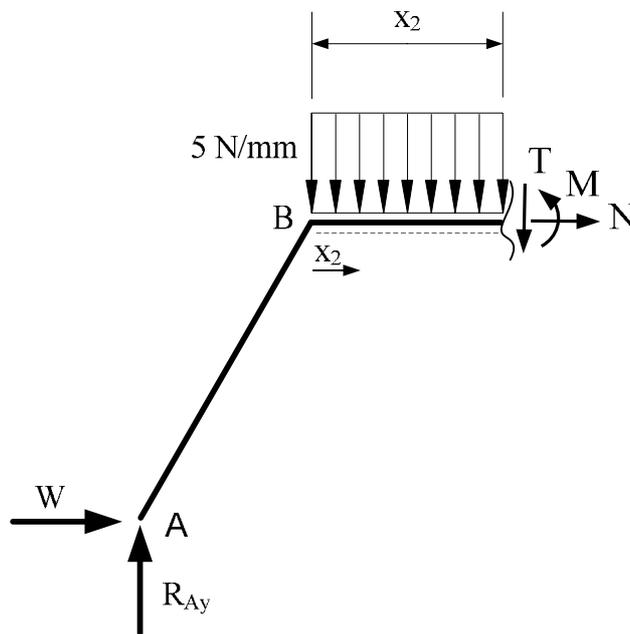
$$T + W \cdot \sin 60^\circ - R_{Ay} \cdot \cos 60^\circ = 0$$

$$T = -W \cdot 0.866 + \frac{77.9 \cdot W + 25000}{145} \cdot 0.5$$

$$M + W \cdot \sin 60^\circ \cdot x_1 - R_{Ay} \cdot \cos 60^\circ \cdot x_1 = 0$$

$$M = \left(-W \cdot 0.866 + \frac{77.9 \cdot W + 25000}{145} \cdot 0.5 \right) \cdot x_1$$

$$0 \leq x_2 \leq 100$$



$$N + W = 0$$

$$N = -W$$

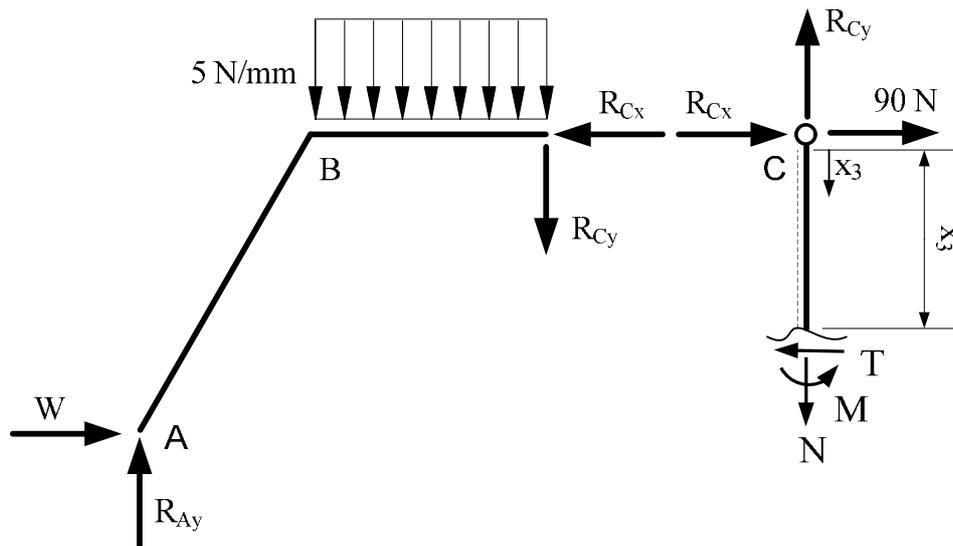
$$T - R_{Ay} + 5 \cdot x_2 = 0$$

$$T = \frac{77.9 \cdot W + 25000}{145} - 5 \cdot x_2$$

$$M + W \cdot 77.9 - R_{Ay} \cdot (x_2 + 45) + 5 \cdot \frac{x_2^2}{2} = 0$$

$$M = -2.5 \cdot x_2^2 + \frac{77.9 \cdot W + 25000}{145} \cdot (x_2 + 45) - W \cdot 77.9$$

$$0 \leq x_3 \leq 130$$



E' necessario calcolare le due reazioni R_{Cx} ed R_{Cy} tramite le equazioni di equilibrio alla traslazione orizzontale e verticale per l'asta AC.

$$\rightarrow) -R_{Cx} + W = 0 \quad R_{Cx} = W$$

$$\uparrow) R_{Cy} + R_{Ay} - 5 \cdot 100 = 0 \quad R_{Cy} = 500 - \frac{77.9 \cdot W + 25000}{145}$$

Le azioni interne in questo tratto, infine, sono le seguenti.

$$N + R_{Cy} = 0$$

$$N = \frac{77.9 \cdot W + 25000}{145} - 500$$

$$T - R_{Cx} - 90 = 0$$

$$T = 90 + W$$

$$M - R_{Cx} \cdot x_3 - 90 \cdot x_3 = 0$$

$$M = (90 + W) \cdot x_3$$

INTEGRALE RELATIVO AL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI
PER IL CALCOLO DELL'INCOGNITA IPERSTATICA

$$0 = \int_0^l N' \cdot N \cdot \frac{dx}{EA} + \int_0^l M' \cdot M \cdot \frac{dx}{EJ}$$

$$EA = 1.701 \cdot 10^7 \text{ N}$$

$$EJ = 1.148 \cdot 10^8 \text{ N} \cdot \text{mm}^2$$

$$\begin{aligned} 0 = & \int_0^{90} -0.965 \cdot \left(-W \cdot 0.5 - \frac{77.9 \cdot W + 25000}{145} \cdot 0.866 \right) \cdot \frac{dx_1}{1.701 \cdot 10^7} + \\ & + \int_0^{90} -0.598 \cdot x_1 \cdot \left(-W \cdot 0.866 + \frac{77.9 \cdot W + 25000}{145} \cdot 0.5 \right) \cdot x_1 \cdot \frac{dx_1}{1.148 \cdot 10^8} + \\ & + \int_0^{100} -1 \cdot (-W) \frac{dx_2}{1.701 \cdot 10^7} + \\ & + \int_0^{100} (0.537 \cdot x_2 - 57.3) \cdot \left[-2.5 \cdot x_2^2 + \frac{77.9 \cdot W + 25000}{145} \cdot (x_2 + 45) - W \cdot 77.9 \right] \cdot \frac{dx_2}{1.148 \cdot 10^8} + \\ & + \int_0^{130} 0.537 \cdot \left(\frac{77.9 \cdot W + 25000}{145} - 500 \right) \cdot \frac{dx_3}{1.701 \cdot 10^7} + \int_0^{130} x_3 \cdot (90 + W) \cdot x_3 \cdot \frac{dx_3}{1.148 \cdot 10^8} \end{aligned}$$

Svolgendo i calcoli si ottiene il seguente valore dell'iperstatica W.

$$W = -30.79 \text{ N}$$

Essendo di segno negativo, significa che il verso è opposto a quello scelto arbitrariamente per l'incognita iperstatica nell'isostatica associata.

Sostituendo tale valore (con il segno) nelle equazioni già scritte per le azioni interne del sistema degli spostamenti, si ottengono le equazioni definitive delle azioni interne per questa struttura.

$$0 \leq x_1 \leq 90$$

$$N = -119.59 \text{ N}$$

$$T = 104.6 \text{ N}$$

$$M = 104.6 \cdot x_1$$

Calcolo di alcuni valori per il tracciamento dei diagrammi delle azioni interne.

$$M(0) = 0$$

$$M(90) = 9414 \text{ Nmm}$$

$$0 \leq x_2 \leq 100$$

$$N = 30.79 \text{ N}$$

$$T = 155.87 - 5 \cdot x_2$$

$$M = -2.5 \cdot x_2^2 + 155.87 \cdot x_2 + 9414$$

Calcolo di alcuni valori per il tracciamento dei diagrammi delle azioni interne.

$$T(0) = 155.87 \text{ N}$$

$$T(100) = -344.13 \text{ N}$$

Il taglio assume valore nullo per $x_2 = 31.17 \text{ mm}$, per cui il momento ha un punto di stazionarietà (massimo/minimo) in tale punto.

E' sufficiente quindi calcolare il valore del momento agli estremi del tratto e nel punto di massimo/minimo, sapendo che avrà andamento parabolico.

$$M(0) = 9413 \text{ Nmm}$$

$$M(31.17) = 11849 \text{ Nmm}$$

$$M(100) = 0$$

$$0 \leq x_3 \leq 130$$

$$N = -344.13 \text{ N}$$

$$T = 59.21 \text{ N}$$

$$M = 59.21 \cdot x_3$$

Calcolo di alcuni valori per il tracciamento dei diagrammi delle azioni interne.

$$M(0) = 0$$

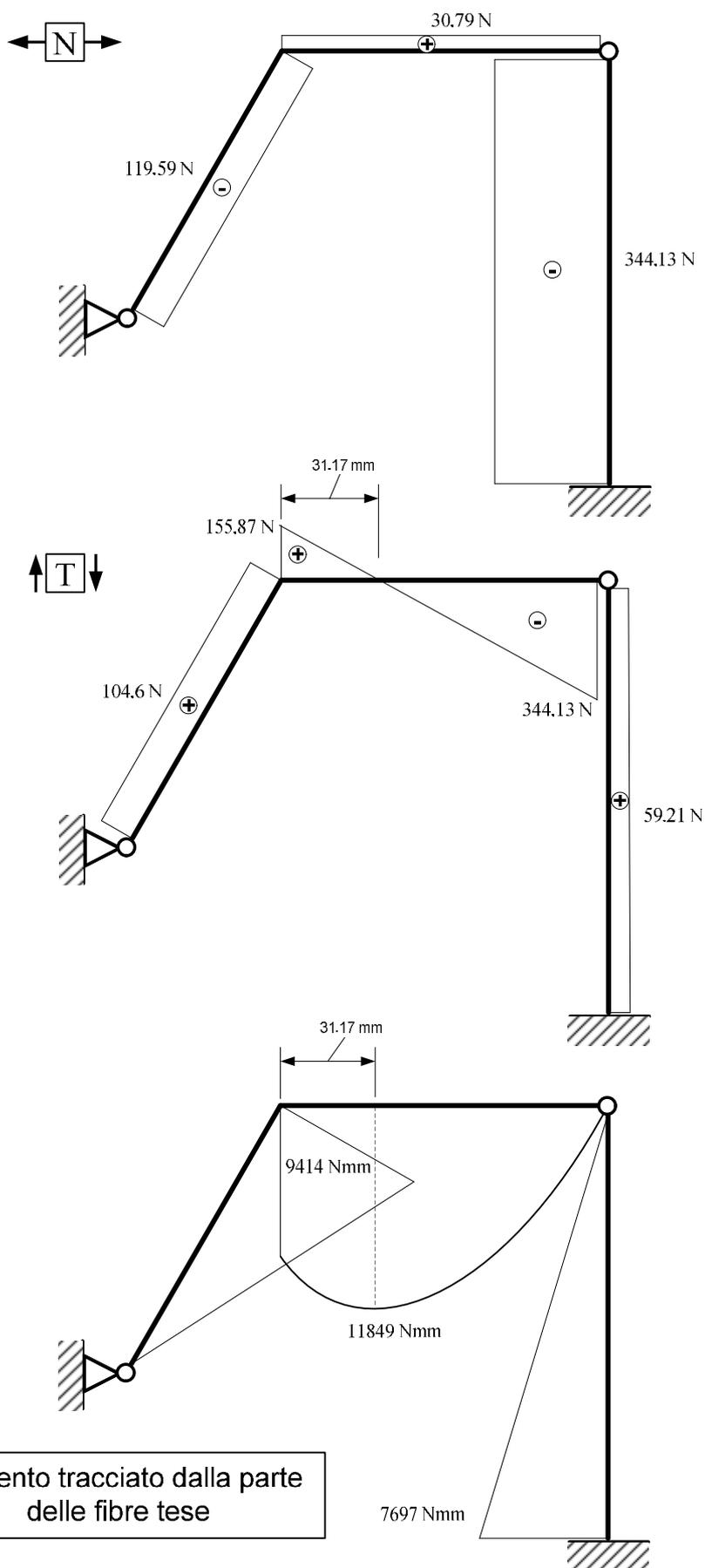
$$M(130) = 7697 \text{ Nmm}$$

Nella pagina seguente sono riportati i diagrammi delle azioni interne per la struttura. Su tali diagrammi si possono fare alcune osservazioni:

- il momento nelle cerniere A e C è nullo;
- il diagramma del momento non presenta salti, non essendoci coppie applicate;
- nel tratto BC (soggetto ad un carico distribuito di valore costante) il momento è parabolico, il taglio varia linearmente, ed il momento ha un massimo o minimo nel punto in cui il taglio è nullo;
- nei tratti AB e CD il momento varia linearmente ed il taglio è costante.

Tutte queste osservazioni indicano come i diagrammi delle azioni interne siano coerenti con lo schema statico della struttura originaria.

DIAGRAMMI DELLE AZIONI INTERNE (N, T, M) DELLA STRUTTURA

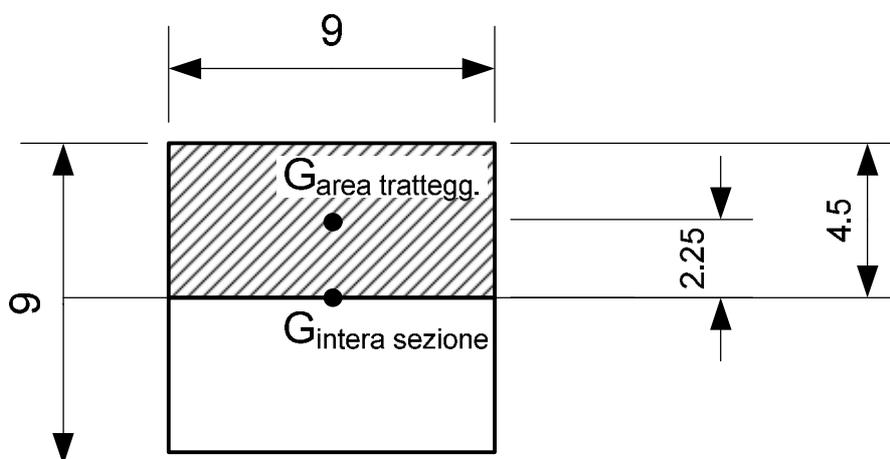


CALCOLO DEL MASSIMO SFORZO τ NELLA STRUTTURA

Nella sezione $x_2=100$ mm (asta BC) si ha il massimo valore del taglio. Sicuramente è questa la sezione in cui cercare lo sforzo τ massimo. Nell'ambito di questa sezione, dato che il momento statico S è massimo nel baricentro e la larghezza b è costante, sicuramente le τ massime saranno in corrispondenza dell'asse baricentrico. Il calcolo è il seguente.

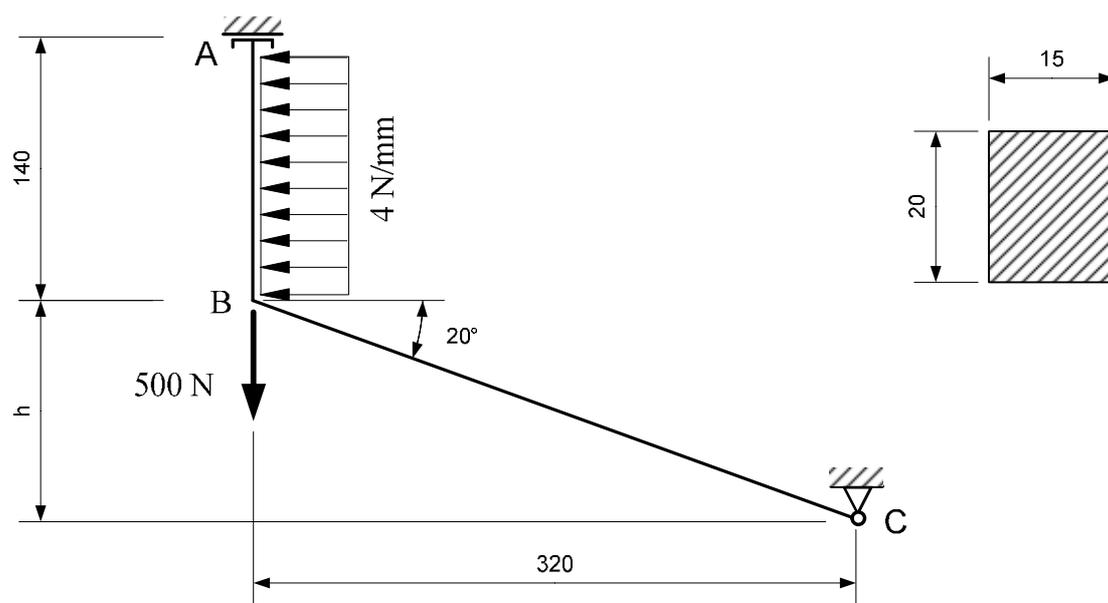
$$T(x_2 = 100) = -344.13 \text{ N}$$

$$\tau_{\max} = \frac{T \cdot S}{J \cdot b} = \frac{344.13 \cdot [(9 \cdot 4.5) \cdot 2.25]}{546.75 \cdot 9} = 6.37 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$



PROVA SCRITTA 15 luglio 2013 - Esercizio 2

Data la struttura in acciaio ($E= 210 \text{ GPa}$) schematizzata in figura, ricavare le equazioni delle azioni interne (M, N e T) e tracciarne i diagrammi.



Struttura una volta iperstatica ($GdL=3$; $GdV=4$), non labile.
Per la risoluzione della struttura verrà utilizzato il Principio dei Lavori Virtuali.

CALCOLI PRELIMINARI

Area e momento di inerzia della sezione quadrata piena.

$$A = 15 \cdot 20 = 300 \text{ mm}^2$$

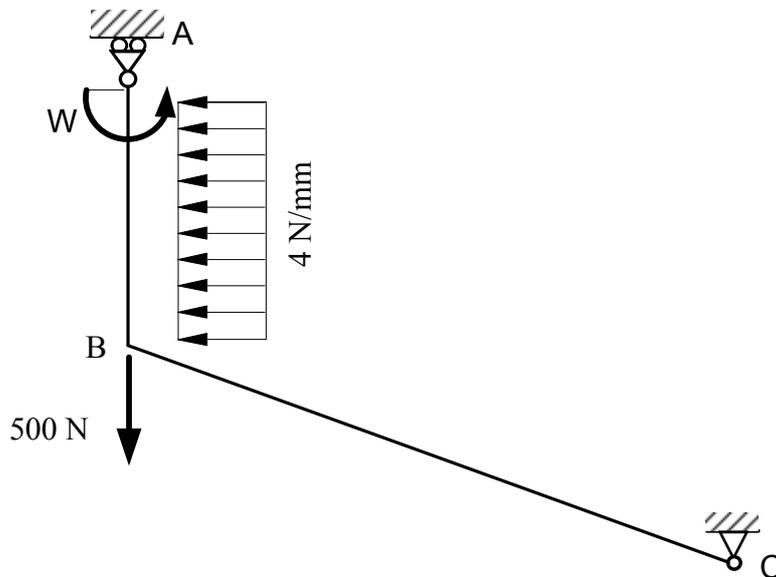
$$J = \frac{1}{12} \cdot 15 \cdot 20^3 = 10000 \text{ mm}^4$$

$$h = 320 \cdot \tan 20^\circ = 116.47 \text{ mm}$$

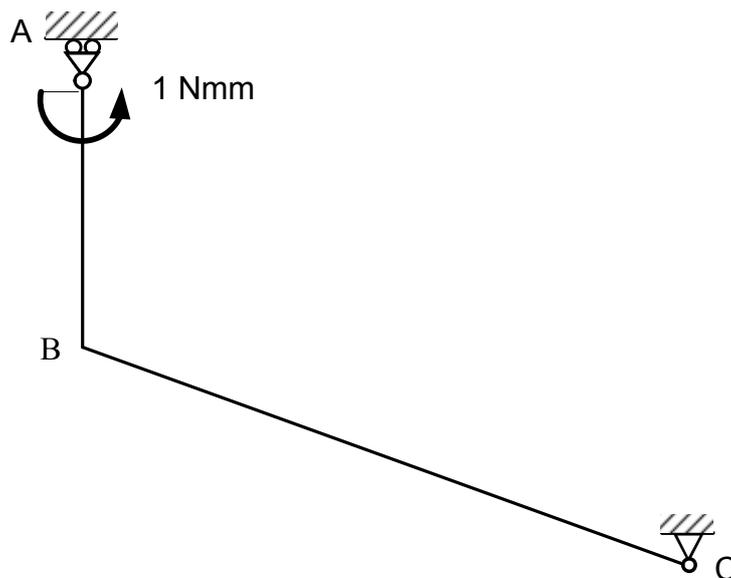
$$BC = \frac{320}{\cos 20^\circ} = 340.5 \text{ mm}$$

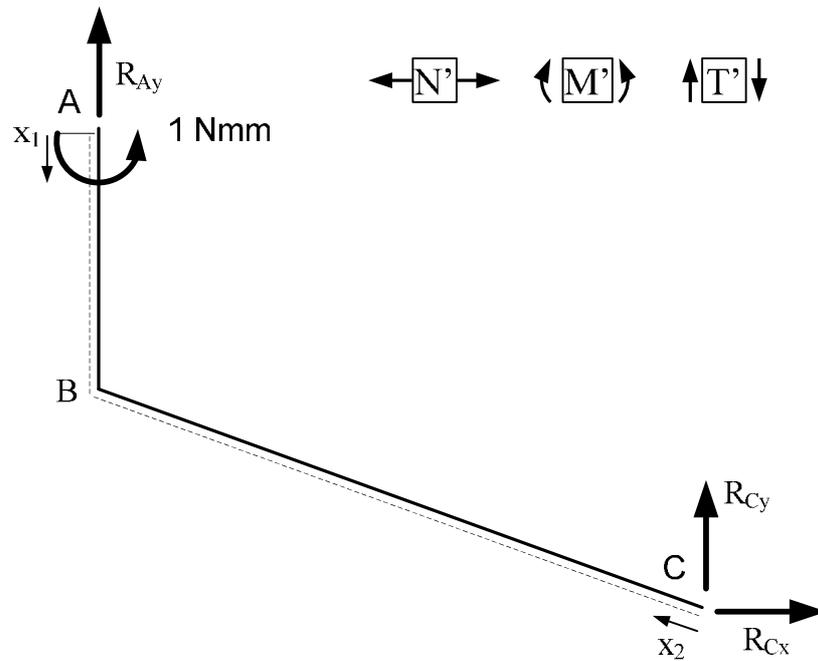
STRUTTURA ISOSTATICA ASSOCIATA E SISTEMA DEGLI SPOSTAMENTI

Nella scelta della struttura isostatica associata, che in questo caso coincide con il sistema degli spostamenti, si è deciso di eliminare come grado di vincolo il blocco della rotazione imposto dal pattino in A, trasformandolo quindi in un carrello con piano di scorrimento orizzontale ed inserendo, come reazione iperstatica, la coppia W . La seguente struttura è una struttura isostatica e non labile.



RISOLUZIONE DEL SISTEMA DELLE FORZE





Calcolo delle reazioni vincolari necessarie.

Equilibrio alla rotazione della struttura con polo in C.

$$\curvearrowright_C) R_{Ay} \cdot 320 - 1 = 0 \quad R_{Ay} = 0.003125 \text{ N}$$

Equilibrio alla traslazione orizzontale della struttura.

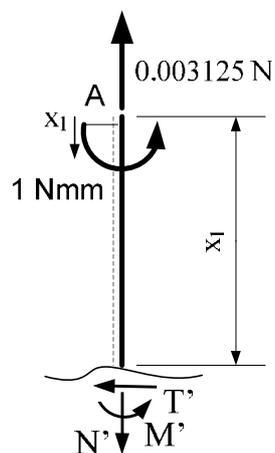
$$\rightarrow) R_{Cx} = 0$$

Equilibrio alla traslazione verticale della struttura.

$$\uparrow) R_{Cy} + R_{Ay} = 0 \quad R_{Cy} = -0.003125 \text{ N}$$

Calcolo delle azioni interne.

$$0 \leq x_1 \leq 140$$



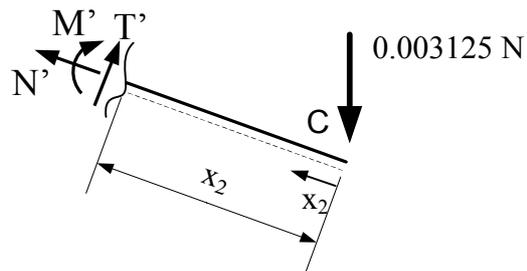
$$N' - 0.003125 = 0$$

$$N' = 0.003125 \text{ N}$$

$$M' + 1 = 0$$

$$M' = -1 \text{ Nmm}$$

$$0 \leq x_2 \leq 340.5$$



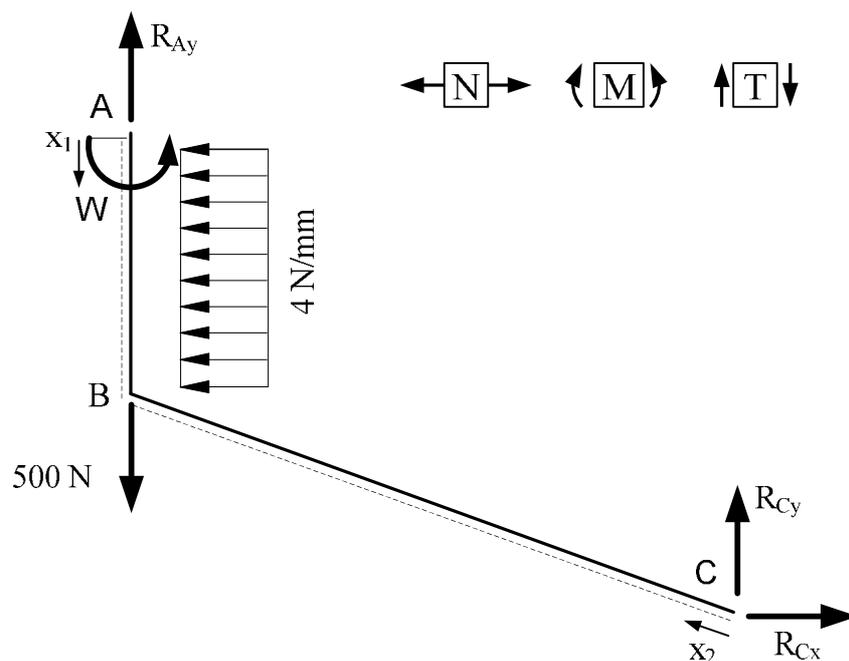
$$N' - 0.003125 \cdot \sin 20^\circ = 0$$

$$N' = 0.00107 \text{ N}$$

$$M' + 0.003125 \cdot \cos 20^\circ \cdot x_2 = 0$$

$$M' = -0.00295 \cdot x_2$$

RISOLUZIONE DEL SISTEMA DEGLI SPOSTAMENTI



Calcolo delle reazioni vincolari necessarie.

Equilibrio alla rotazione della struttura con polo in C.

$$\curvearrowright_C) R_{Ay} \cdot 320 - W - 500 \cdot 320 - 4 \cdot 140 \cdot \left(\frac{140}{2} + 116.47 \right) = 0 \quad R_{Ay} = \frac{W}{320} + 826.3$$

Equilibrio alla traslazione orizzontale della struttura.

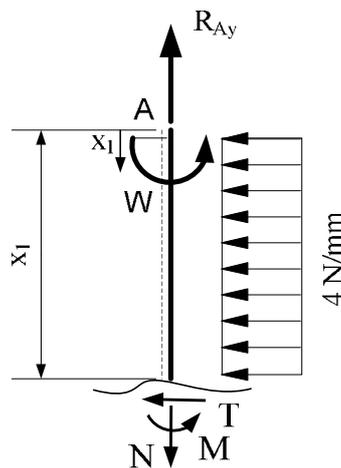
$$\rightarrow) R_{Cx} - 4 \cdot 140 = 0 \quad R_{Cx} = 560 \text{ N}$$

Equilibrio alla traslazione verticale della struttura.

$$\uparrow) R_{Cy} + R_{Ay} - 500 = 0 \quad R_{Cy} = - \left(\frac{W}{320} + 326.3 \right)$$

Calcolo delle azioni interne.

$$0 \leq x_1 \leq 140$$



$$N - R_{Ay} = 0$$

$$N = \frac{W}{320} + 826.3$$

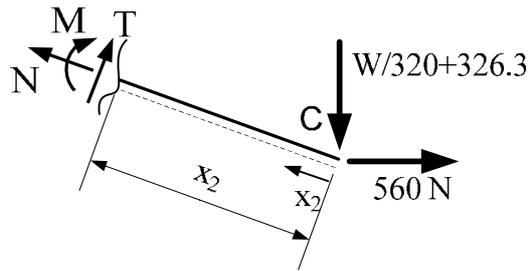
$$T + 4 \cdot x_1 = 0$$

$$T = -4 \cdot x_1$$

$$M + W + 4 \cdot \frac{x_1^2}{2} = 0$$

$$M = -W - 2 \cdot x_1^2$$

$$0 \leq x_2 \leq 340.5$$



$$N - 560 \cdot \cos 20^\circ - R_{Cy} \cdot \sin 20^\circ = 0$$

$$N = 637.8 + 0.00107 \cdot W$$

$$T + 560 \cdot \sin 20^\circ - R_{Cy} \cdot \cos 20^\circ = 0$$

$$T = 115.19 + 0.00194 \cdot W$$

$$M - 560 \cdot \sin 20^\circ \cdot x_2 + R_{Cy} \cdot \cos 20^\circ \cdot x_2 = 0$$

$$M = -(115.19 + 0.00194 \cdot W) \cdot x_2$$

INTEGRALE RELATIVO AL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI
PER IL CALCOLO DELL'IPERSTATICA

$$0 = \int_0^l N' \cdot N \cdot \frac{dx}{EA} + \int_0^l M' \cdot M \cdot \frac{dx}{EJ}$$

$$EA = 6.3 \cdot 10^7 \text{ N}$$

$$EJ = 3.0 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}^2$$

$$0 = \int_0^{140} 0.003125 \cdot \left(\frac{W}{320} + 826.3 \right) \cdot \frac{dx_1}{6.3 \cdot 10^7} + \int_0^{140} -1 \cdot (-W - 2 \cdot x_1^2) \cdot \frac{dx_1}{3.0 \cdot 10^6} +$$

$$+ \int_0^{340.5} 0.00107 \cdot (637.8 + 0.00107 \cdot W) \cdot \frac{dx_2}{6.3 \cdot 10^7} +$$

$$+ \int_0^{340.5} -0.00295 \cdot x_2 \cdot [-(115.19 + 0.00194 \cdot W) \cdot x_2] \cdot \frac{dx_2}{3.0 \cdot 10^6}$$

Svolgendo i calcoli si ottiene il seguente valore dell'iperstatica W.

$$W = -24840 \text{ Nmm}$$

Essendo di segno negativo, significa che il verso è opposto a quello scelto arbitrariamente per l'incognita iperstatica nell'isostatica associata.

Sostituendo tale valore (con il segno) nelle equazioni già scritte per le azioni interne del sistema degli spostamenti, si ottengono le equazioni definitive delle azioni interne per questa struttura.

$$0 \leq x_1 \leq 140$$

$$N = 748.7 \text{ N}$$

$$T = -4 \cdot x_1$$

$$M = 24840 - 2 \cdot x_1^2$$

Calcolo di alcuni valori per il tracciamento dei diagrammi delle azioni interne.

$$T(0) = 0$$

$$T(140) = -560 \text{ N}$$

$$M(0) = 24840 \text{ Nmm}$$

$$M(140) = -14360 \text{ Nmm}$$

Il taglio assume valore nullo per $x_1 = 0$, per cui il momento ha un punto di stazionarietà (massimo/minimo) in tale punto. Per tracciare il diagramma del momento bastano pertanto i valori agli estremi dell'intervallo.

$$0 \leq x_2 \leq 340.5$$

$$N = 611.22 \text{ N}$$

$$T = 42.17 \text{ N}$$

$$M = -42.17 \cdot x_2$$

Calcolo di alcuni valori per il tracciamento dei diagrammi delle azioni interne.

$$M(0) = 0$$

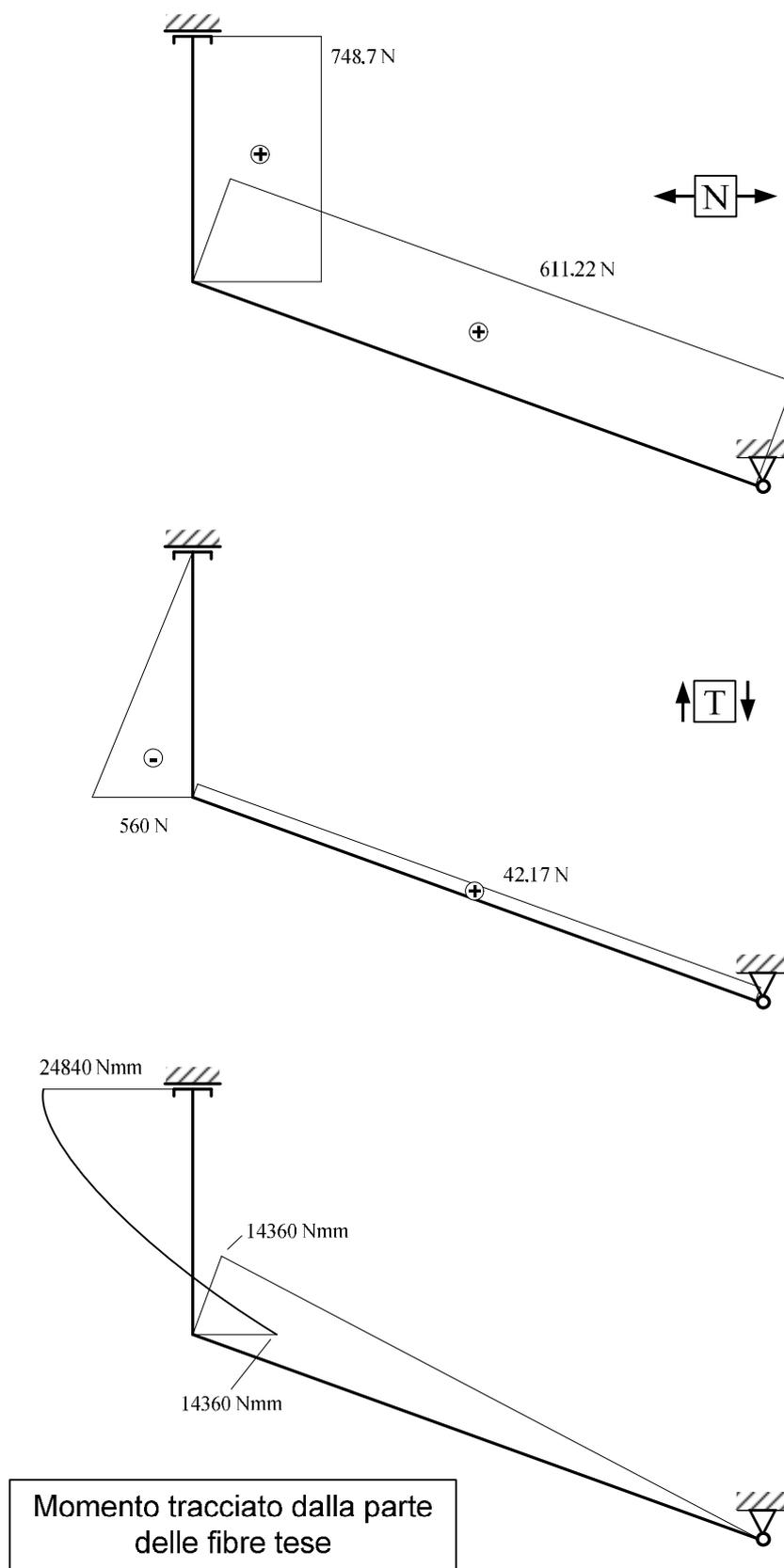
$$M(340.5) = -14360 \text{ Nmm}$$

Nella pagina seguente sono riportati i diagrammi delle azioni interne per la struttura. Su tali diagrammi si possono fare alcune osservazioni:

- il momento nella cerniera C è nullo;
- il diagramma del momento non presenta salti, non essendoci coppie applicate;
- nel tratto AB (soggetto ad un carico distribuito di valore costante) il momento è parabolico, il taglio varia linearmente, ed il momento ha un massimo/minimo nel punto in cui il taglio è nullo, in questo caso proprio nell'estremo iniziale dell'asta;
- nel tratto BC il momento varia linearmente ed il taglio è costante.

Tutte queste osservazioni indicano come i diagrammi delle azioni interne siano coerenti con lo schema statico della struttura originaria.

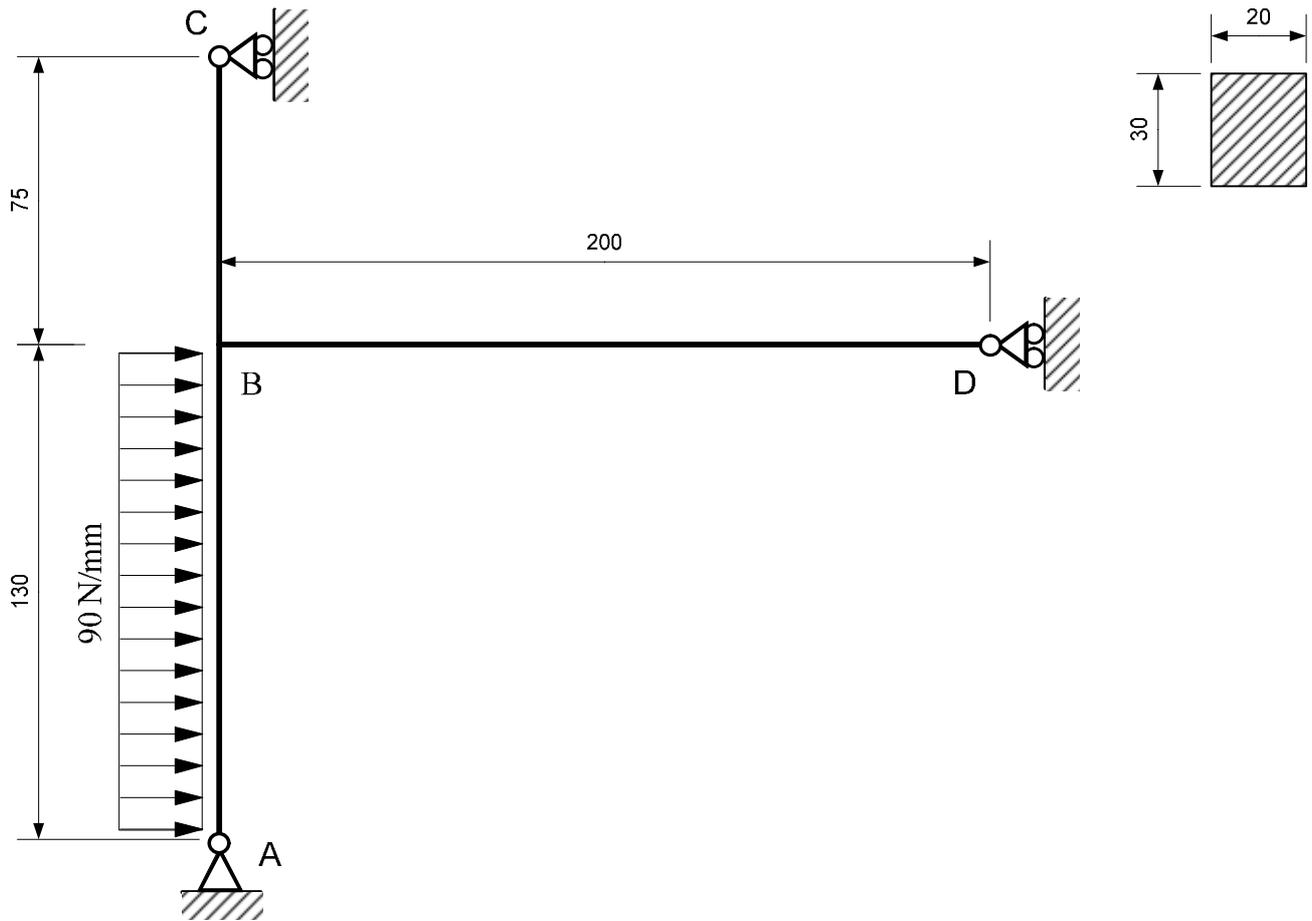
DIAGRAMMI DELLE AZIONI INTERNE (N, T, M) DELLA STRUTTURA



PROVA SCRITTA 25 giugno 2010 - Esercizio 2

Data la trave di figura realizzata in acciaio ($E = 210 \text{ GPa}$), si richiede :

- il tracciamento dei diagrammi delle azioni interne.
- il calcolo dello sforzo massimo (in valore assoluto) di compressione nella struttura.



Struttura una volta iperstatica ($GdL=3$; $GdV=4$), non labile.

La risoluzione della struttura verrà utilizzato il Principio dei Lavori Virtuali.

CALCOLI PRELIMINARI

Area e momento di inerzia della sezione circolare piena.

$$A = 30 \cdot 20 = 600 \text{ mm}^2$$

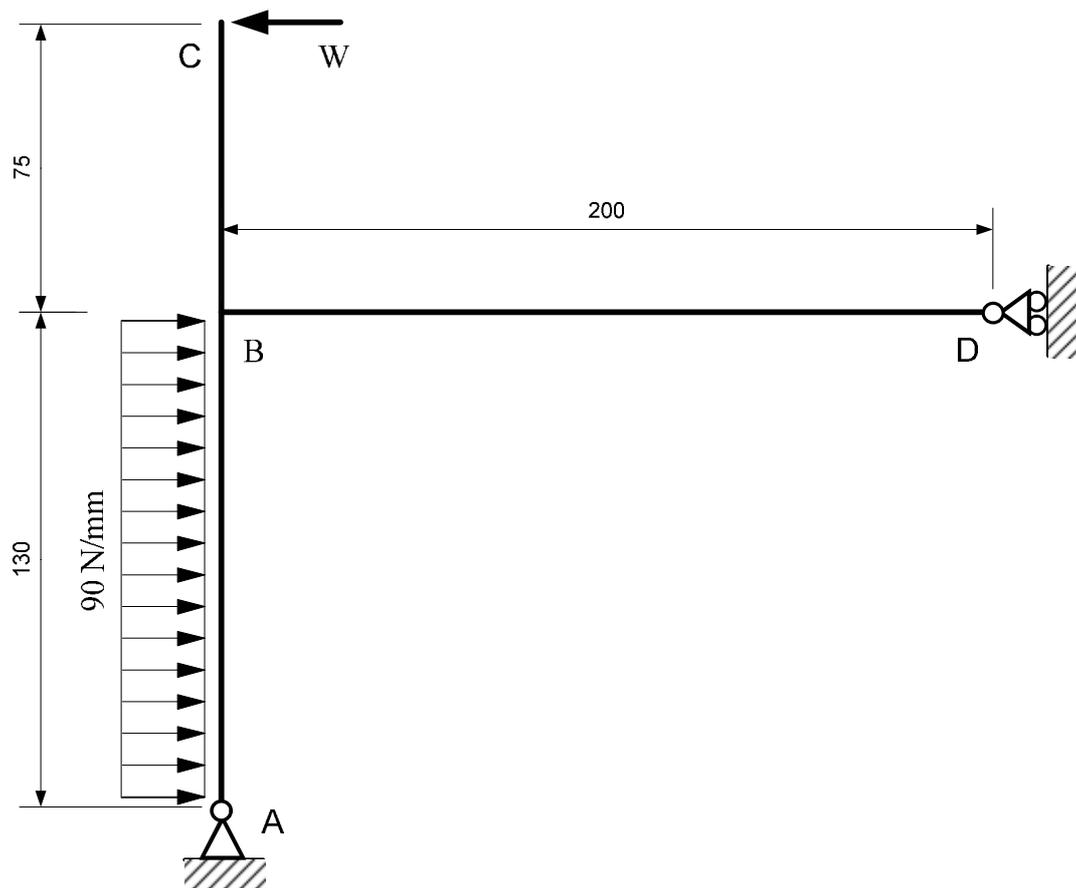
$$J = \frac{1}{12} \cdot 20 \cdot 30^3 = 45000 \text{ mm}^4$$

$$E \cdot A = 1.26 \cdot 10^8 \text{ N}$$

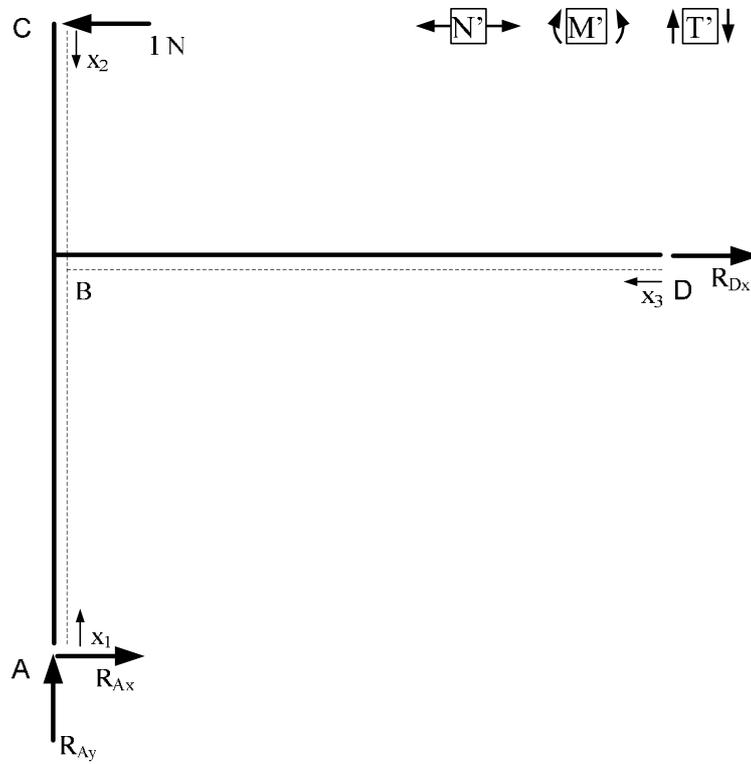
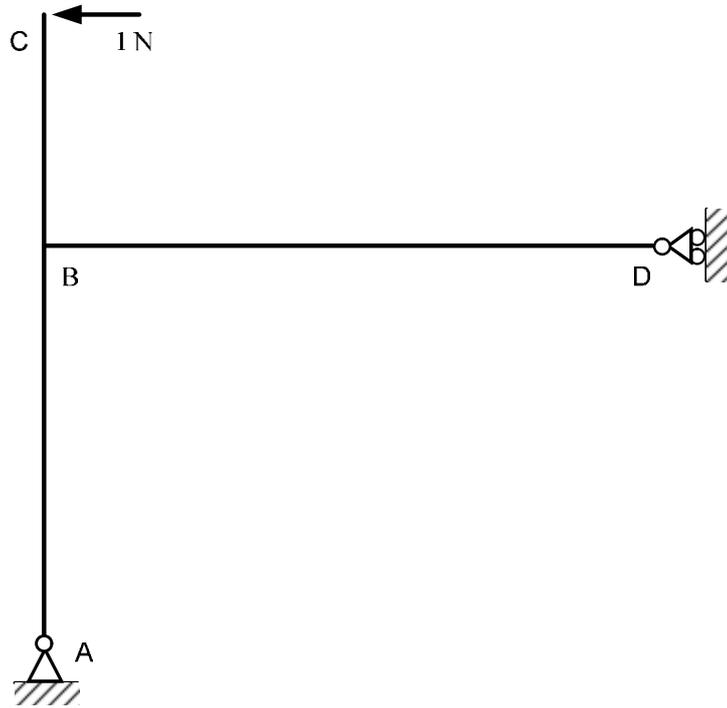
$$E \cdot J = 9.45 \cdot 10^9 \text{ N}$$

STRUTTURA ISOSTATICA ASSOCIATA

Nella scelta della struttura isostatica associata si è deciso di eliminare il grado di vincolo fornito dal carrello in C, sostituendolo quindi con la reazione iperstatica W (la seguente struttura è una struttura isostatica e non labile).



RISOLUZIONE DEL SISTEMA DELLE FORZE



Calcolo delle reazioni vincolari necessarie.

Equilibrio alla traslazione verticale di tutta la struttura.

$$\uparrow) R_{Ay} = 0$$

Equilibrio alla rotazione di tutta la struttura con polo nella cerniera A.

$$\curvearrowleft_A) -1 \cdot (130 + 75) + R_{Dx} \cdot 130 = 0 \quad \text{da cui} \quad R_{Dx} = 1.577 \text{ N}$$

Equilibrio alla traslazione orizzontale di tutta la struttura.

$$\rightarrow) R_{Ax} + R_{Dx} - 1 = 0 \quad \text{da cui} \quad R_{Ax} = 0.577 \text{ N}$$

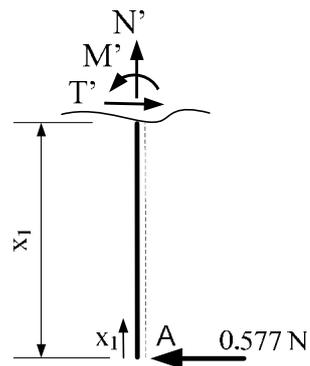
Calcolo delle azioni interne.

$$0 \leq x_1 \leq 130$$

$$N' = 0$$

$$M' - 0.577 \cdot x_1 = 0$$

$$M' = 0.577 \cdot x_1$$

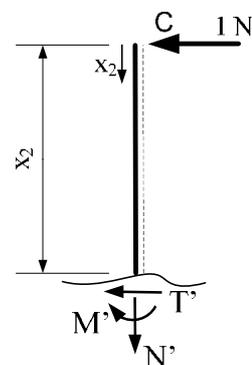


$$0 \leq x_2 \leq 75$$

$$N' = 0$$

$$M' - 1 \cdot x_2 = 0$$

$$M' = x_2$$

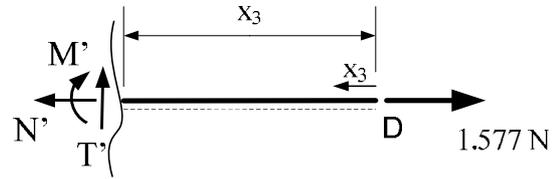


$$0 \leq x_3 \leq 200$$

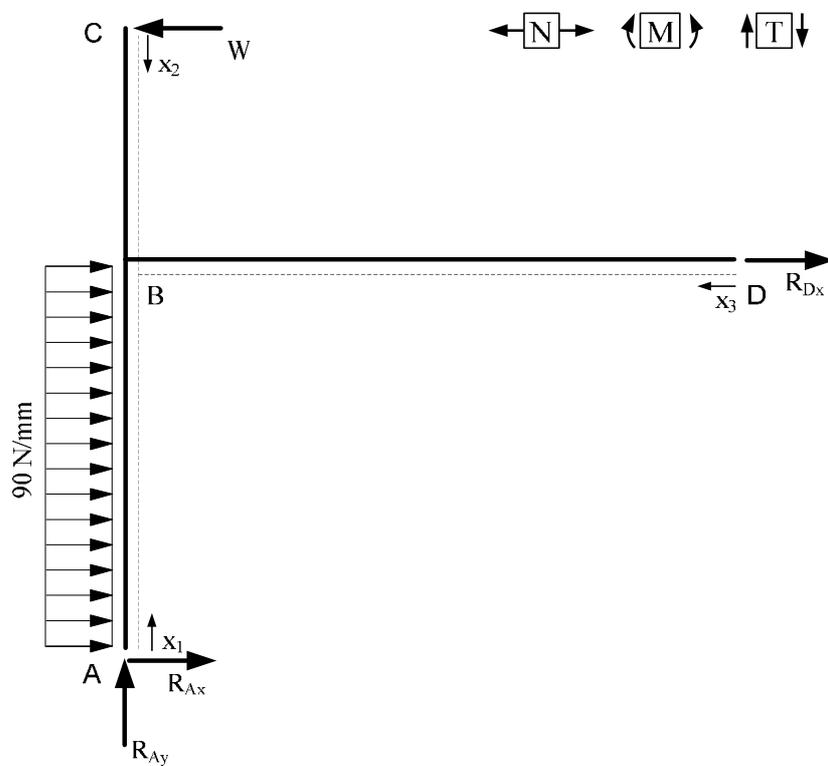
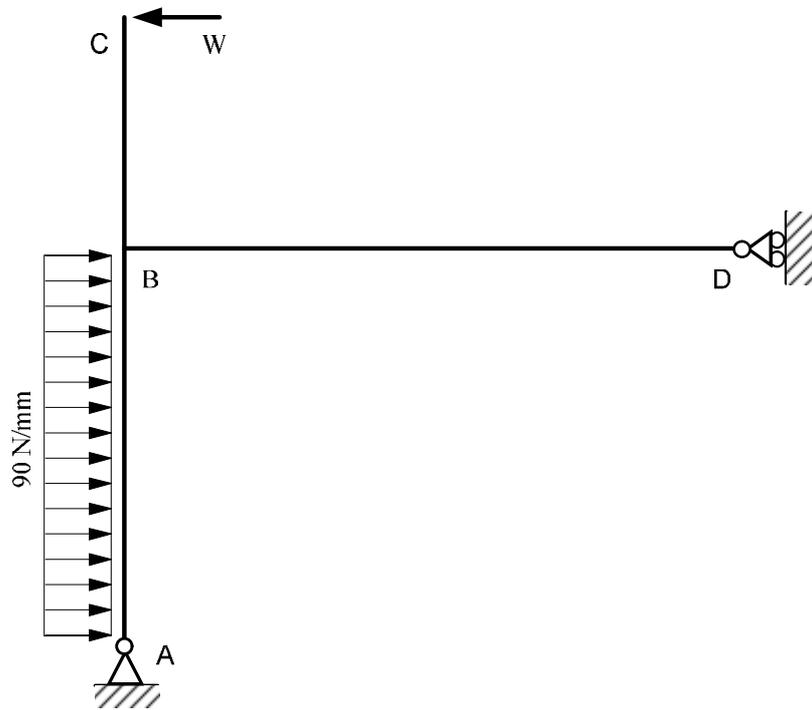
$$N' - 1.577 = 0$$

$$N' = 1.577 \text{ N}$$

$$M' = 0$$



RISOLUZIONE DEL SISTEMA DEGLI SPOSTAMENTI



Calcolo delle reazioni vincolari necessarie.

Equilibrio alla traslazione verticale di tutta la struttura.

$$\uparrow) R_{Ay} = 0$$

Equilibrio alla rotazione di tutta la struttura con polo nella cerniera A.

$$\curvearrowleft_A) -W \cdot (130 + 75) + R_{Dx} \cdot 130 + 90 \cdot \frac{130^2}{2} = 0 \quad \text{da cui} \quad R_{Dx} = 1.577 \cdot W - 5850$$

Equilibrio alla traslazione orizzontale di tutta la struttura.

$$\rightarrow) R_{Ax} + 90 \cdot 130 + R_{Dx} - W = 0 \quad \text{da cui} \quad R_{Ax} = -0.577 \cdot W - 5850$$

Calcolo delle azioni interne.

$$0 \leq x_1 \leq 130$$

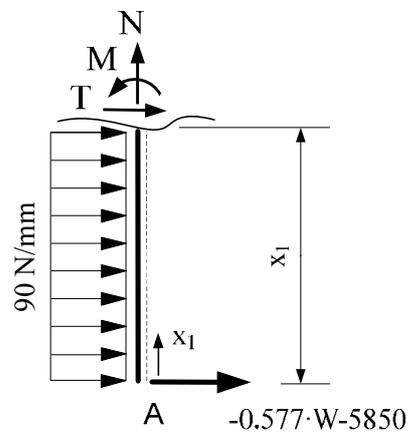
$$N = 0$$

$$T - 0.577 \cdot W - 5850 + 90 \cdot x_1 = 0$$

$$T = 0.577 \cdot W + 5850 - 90 \cdot x_1$$

$$M + 90 \cdot \frac{x_1^2}{2} + (-0.577 \cdot W - 5850) \cdot x_1 = 0$$

$$M = (0.577 \cdot W + 5850) \cdot x_1 - 45 \cdot x_1^2$$



$$0 \leq x_2 \leq 75$$

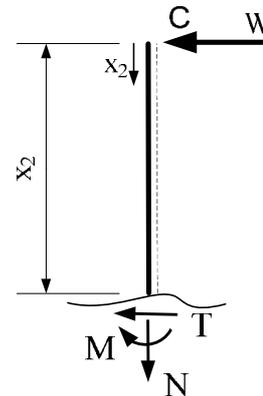
$$N = 0$$

$$T + W = 0$$

$$T = -W$$

$$M - W \cdot x_2 = 0$$

$$M = W \cdot x_2$$



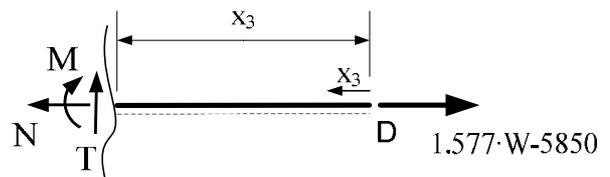
$$0 \leq x_3 \leq 200$$

$$N - (1.577 \cdot W - 5850) = 0$$

$$N = 1.577 \cdot W - 5850$$

$$T = 0$$

$$M = 0$$



INTEGRALE RELATIVO AL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI
PER IL CALCOLO DELL'INCOGNITA IPERSTATICA

$$0 = \int_0^1 N' \cdot N \cdot \frac{dx}{EA} + \int_0^1 M' \cdot M \cdot \frac{dx}{EJ}$$

Trattandosi di una struttura snella, nella quale gli effetti del taglio sono trascurabili rispetto a quelli del momento e dell'azione normale, si può trascurare il contributo del taglio nell'integrale del Principio dei Lavori Virtuali.

$$0 = \int_0^{130} 0.577 \cdot x_1 \cdot [(0.577 \cdot W + 5850) \cdot x_1 - 45 \cdot x_1^2] \cdot \frac{dx_1}{9.45 \cdot 10^9} +$$

$$+ \int_0^{75} x_2 \cdot (W \cdot x_2) \cdot \frac{dx_2}{9.45 \cdot 10^9} + \int_0^{200} 1.577 \cdot (1.577 \cdot W - 5850) \cdot \frac{dx_3}{1.26 \cdot 10^8}$$

Svolgendo i calcoli si ottiene il seguente valore dell'iperstatica W.

$$W = -1137.2 \text{ N}$$

Essendo di segno negativo, significa che il verso è opposto a quello scelto arbitrariamente per l'incognita iperstatica nell'isostatica associata. Sostituendo tale valore (con il segno) nelle equazioni già scritte per le reazioni vincolari e per azioni interne del sistema degli spostamenti, si ottengono i valori delle reazioni vincolari ai vincoli A e D e le equazioni definitive delle azioni interne per questa struttura.

$$R_{Dx} = 1.577 \cdot W - 5850 = 1.577 \cdot (-1137.2) - 5850 = -7643.3 \text{ N}$$

$$R_{Ax} = -0.577 \cdot W - 5850 = -0.577 \cdot (-1137.2) - 5850 = -5193.8 \text{ N}$$

$$0 \leq x_1 \leq 130$$

$$N = 0$$

$$T = 5193.8 - 90 \cdot x_1$$

$$M = 5193.8 \cdot x_1 - 45 \cdot x_1^2$$

Calcolo di alcuni valori per il tracciamento dei diagrammi delle azioni interne.

Di seguito, i valori del momento e del taglio agli estremi dell'intervallo.

$$T(0) = 5193.8 \text{ N} \qquad T(130) = -6506.2 \text{ N}$$

$$M(0) = 0 \qquad M(130) = -85306 \text{ Nmm}$$

Essendo il momento parabolico, è necessario verificare se abbia un punto di stazionarietà (massimo o minimo). Si valuta quindi se il taglio si annulli in qualche punto dell'intervallo.

$$T = 0 \quad \text{per} \quad x_1 = 57.7 \text{ mm}$$

Il taglio assume valore nullo per $x_1=57.7$ mm, per cui il momento ha un punto di stazionarietà in tale punto.

E' sufficiente quindi calcolare il valore del momento agli estremi del tratto e nel punto di stazionarietà, sapendo che avrà andamento parabolico.

$$M(57.5) = M_{\max} = 149864 \text{ Nmm}$$

$$0 \leq x_2 \leq 75$$

$$N = 0$$

$$T = 1137.2 \text{ N}$$

$$M = -1137.2 \cdot x_2$$

Calcolo di alcuni valori per il tracciamento dei diagrammi delle azioni interne.

$$M(0) = 0$$

$$M(75) = -85290 \text{ Nmm}$$

$$0 \leq x_3 \leq 200$$

$$N = -7643.4 \text{ N}$$

$$T = 0$$

$$M = 0$$

Nella pagina seguente sono riportati i diagrammi delle azioni interne per la struttura. Su tali diagrammi si possono fare alcune verifiche e osservazioni:

- il momento nella cerniera A e nei carrelli C e D è nullo;
- il diagramma del momento non presenta discontinuità, non essendoci coppie applicate;
- nel punto B, dove avviene l'intersezione tra le aste AC e BD, il diagramma del taglio dell'asta AC presenta un salto pari al valore della reazione R_{Dx} (7643.3 N).
- nel punto A, dove è presente una cerniera a terra, il diagramma del taglio presenta un salto. Questo è dovuto alla presenza della reazione orizzontale del vincolo ed il salto deve essere pari a tale valore.
- nel tratto AB (soggetto ad un carico distribuito di valore costante) il momento è parabolico, il taglio varia linearmente, ed il momento ha un massimo o minimo nel punto in cui il taglio è nullo;
- nel tratto CB il momento varia linearmente ed il taglio è costante.
- L'equilibrio alla rotazione del nodo B è verificato (vedi schema adiacente al diagramma dei momenti).

Tutte queste osservazioni indicano come i diagrammi delle azioni interne siano coerenti con lo schema statico della struttura originaria.

CALCOLO DELLO SFORZO σ MASSIMO DI COMPRESSIONE NELLA STRUTTURA

Lo sforzo σ massimo di compressione, nella struttura in esame, si può ricercare nella sezione di momento massimo (in valore assoluto) della struttura, quindi nel tratto AB, per $x_1=57.5$ mm, considerando anche l'azione normale nello stesso punto, che in questo caso è nulla.

$$M(57.5) = M_{\max} = 149864.2 \text{ Nmm}$$

$$N(57.5) = 0$$

$$\sigma_M = -\frac{M}{J} \cdot Y = -\frac{149864.2}{45000} \cdot 15 = 49.95 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

DIAGRAMMI DELLE AZIONI INTERNE (M, N, T) DELLA STRUTTURA

