Risposta in frequenza

Introduzione

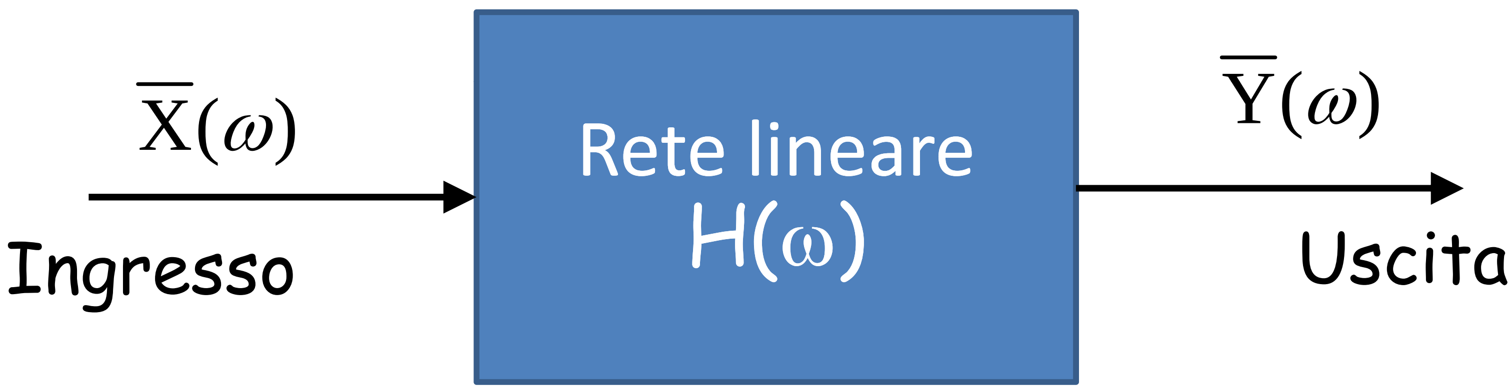
Cosa è la risposta in frequenza di un circuito?

E' la variazione del comportamento del circuito al variare della frequenza

Puo' anche essere considerata come la variazione del guadagno e della fase della funzione di trasferimento del circuito

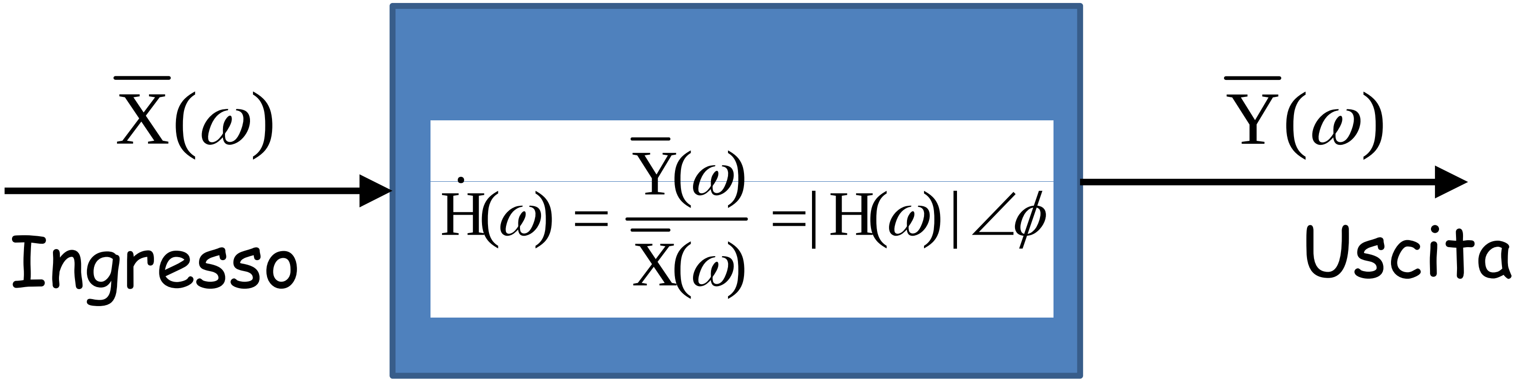
Funzione di trasferimento

- La funzione di trasferimento $H(\omega)$ di un circuito è il rapporto (funzione della frequenza) fra il **fasore dell'uscita** (tensione o corrente di un elemento) e il **fasore dell'ingresso** (sorgente tensione o corrente).



$$\dot{H}(\omega) = \frac{\overline{Y}(\omega)}{\overline{X}(\omega)} = |H(\omega)| \angle \phi$$

Funzione di Trasferimento



- 4 possibili funzioni di trasferimento:

$$H(\omega) = \text{Guadagno di tensione} = \frac{V_o(\omega)}{V_i(\omega)}$$

$$H(\omega) = \text{Impedenza di trasferimento} = \frac{V_o(\omega)}{I_i(\omega)}$$

$$H(\omega) = \text{Guadagno di corrente} = \frac{I_o(\omega)}{I_i(\omega)}$$

$$H(\omega) = \text{Ammettenza di trasferimento} = \frac{I_o(\omega)}{V_i(\omega)}$$

Risposta in frequenza

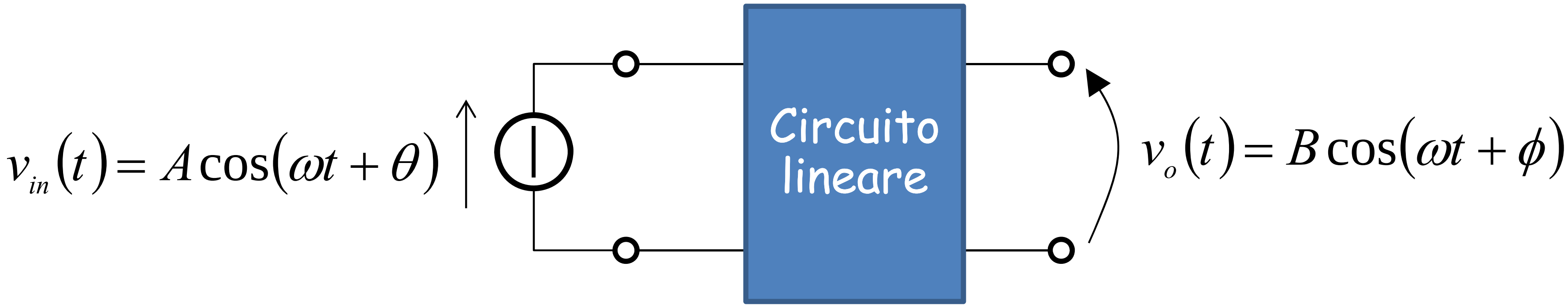
Funzione di rete $\dot{H}(j\omega) = \dfrac{\dot{Y}(j\omega)}{\dot{X}(j\omega)}$

Guadagno $G = \left|\dot{H}(j\omega)\right| = \dfrac{\left|\bar{Y}(j\omega)\right|}{\left|\bar{X}(j\omega)\right|}$

Sfasamento $fase(\dot{H}(j\omega)) = fase(\bar{Y}(j\omega)) - fase(\bar{X}(j\omega))$

L'insieme delle espressioni che danno il guadagno e lo sfasamento in funzione della frequenza si chiama **Risposta in frequenza**

Risposta in frequenza



Guadagno **G=B/A**

Sfasamento $\phi - \theta$ → differenza fra la fase dell'uscita e quella dell'ingresso

Cambiando la frequenza di ingresso
anche il guadagno e lo sfasamento cambiano.

DIAGRAMMI DI BODE

I diagrammi di Bode sono grafici semilogaritmici del modulo (in decibel) e della fase (in gradi) di una funzione di trasferimento in funzione della frequenza

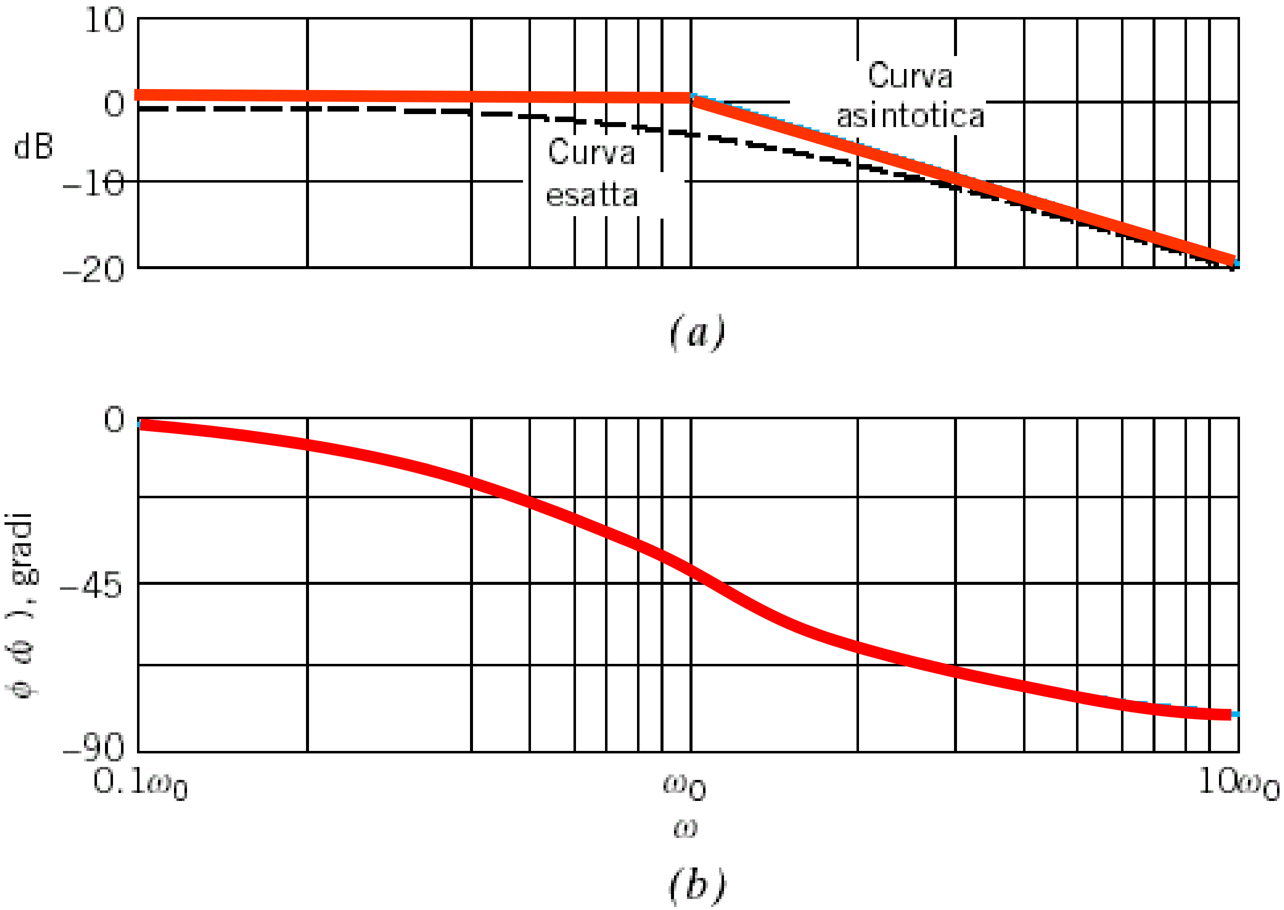
Si possono tracciare i grafici della risposta in frequenza utilizzando scale logaritmiche (carta semi-logaritmica):

Guadagno in scala logaritmica = $20\log_{10} H(dB)$

Diagramma di Bode per $\mathbf{H} = (1 + j\omega / \omega_0)^{-1}$.

La linea tratteggiata è la curva esatta dell'ampiezza.

La linea continua è l'approssimazione asintotica.



La scala dei decibel

$$\boxed{H_{dB} = 20\log_{10} H}$$

Guadagno di potenza

$$\boxed{G_{dB} = 10\log_{10}\frac{P_2}{P_1}}$$

Guadagno di tensione

$$\boxed{G_{dB} = 20\log_{10}\frac{V_2}{V_1}}$$

Guadagno di corrente

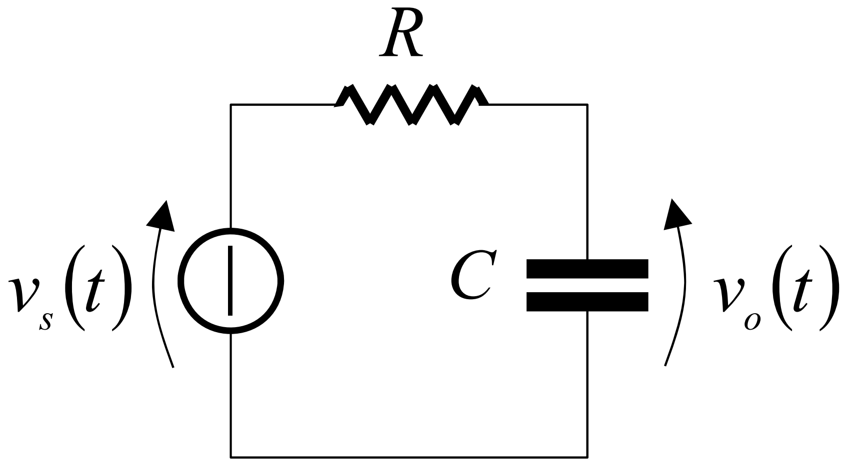
$$\boxed{G_{dB} = 20\log_{10}\frac{I_2}{I_1}}$$

Valori del guadagno e corrispondenti valori in decibel

Modulo H	$20\log_{10} H(dB)$
0.001	-60
0.01	-40
0.1	-20
0.5	-6
$1/\sqrt{2}$	-3
1	0
$\sqrt{2}$	3
2	6
10	20
20	26
100	40
1000	60

Funzione di trasferimento

Esempio 1

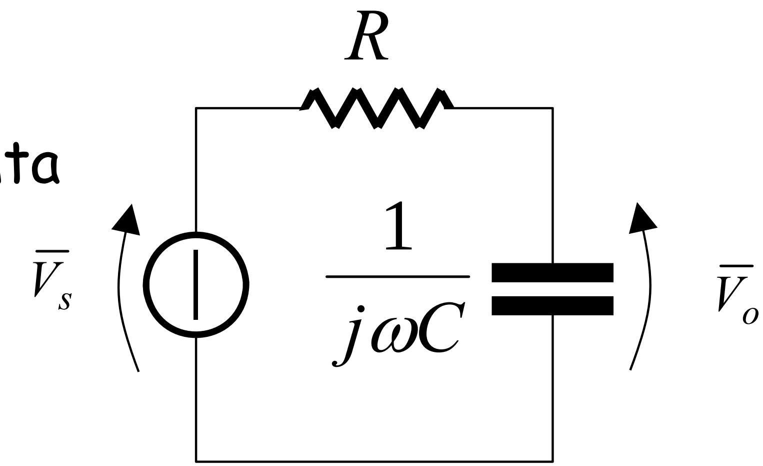


Per il circuito RC di figura, ricavare la funzione di trasferimento v_o/v_s e la sua risposta in frequenza.

Sia $v_s = V_m \cos\omega t$

Soluzione

Nel dominio della frequenza il circuito diventa

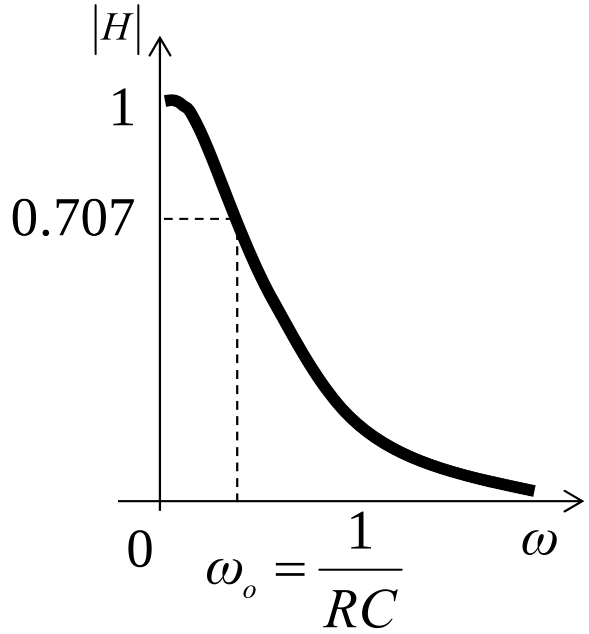


La funzione di trasferimento è

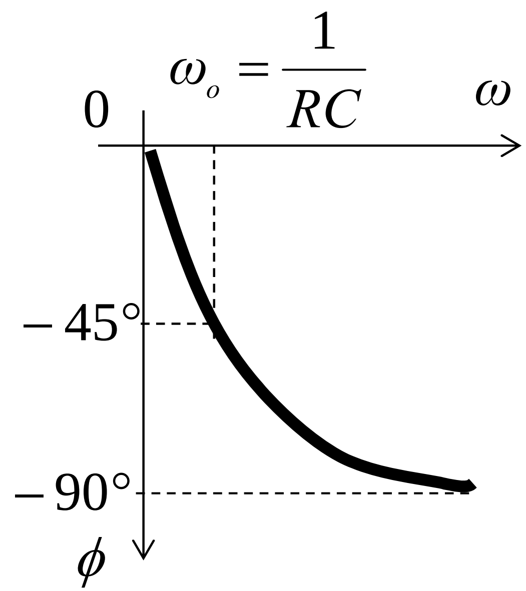
$$\dot{H}(\omega) = \frac{\overline{V}_o}{\overline{V}_s} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + 1/j\omega C} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

$\omega_0 = 1/\mathrm{RC}$

$$\dot{\mathrm{H}}(\omega) = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\omega / \omega_0}$$

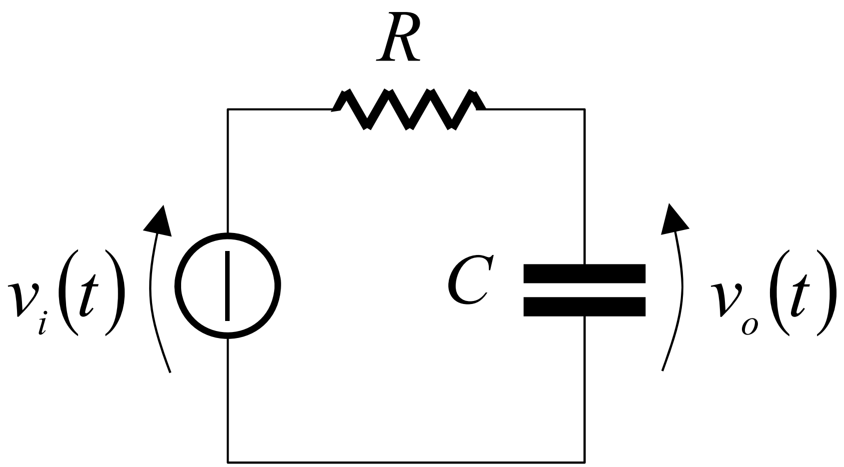


L'ampiezza è $\left|\mathrm{H}(\omega)\right| = \dfrac{1}{\sqrt{1 + (\omega / \omega_o)^2}}$



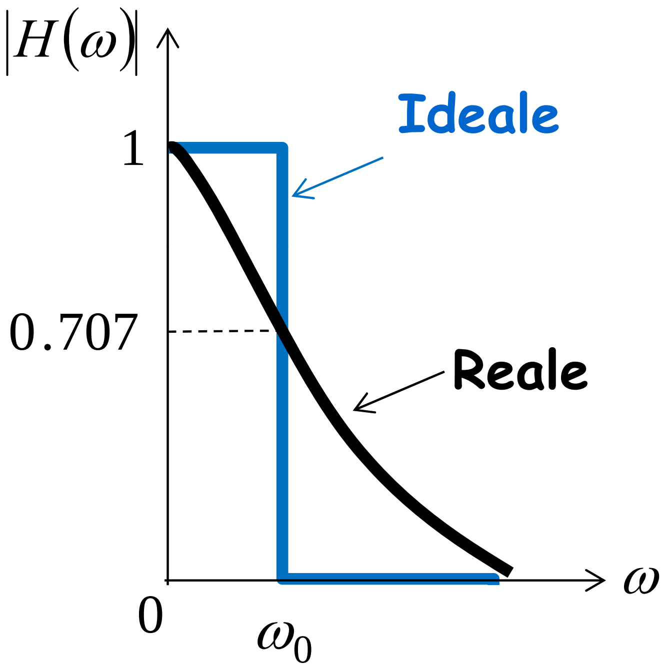
La fase è $\phi = -\tan^{-1}\dfrac{\omega}{\omega_o}$

Filtro passa-basso



$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

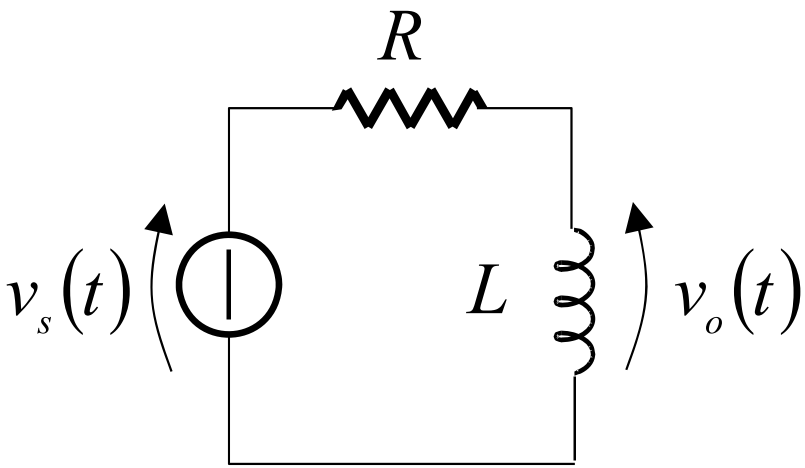
Risposta in frequenza ideale e reale di un filtro bassa-basso



Un filtro passa-basso è progettato per lasciar passare soltanto le frequenze da 0 (segnale stazionario) fino alla frequenza di taglio ω_0

Funzione di trasferimento

Esempio 2

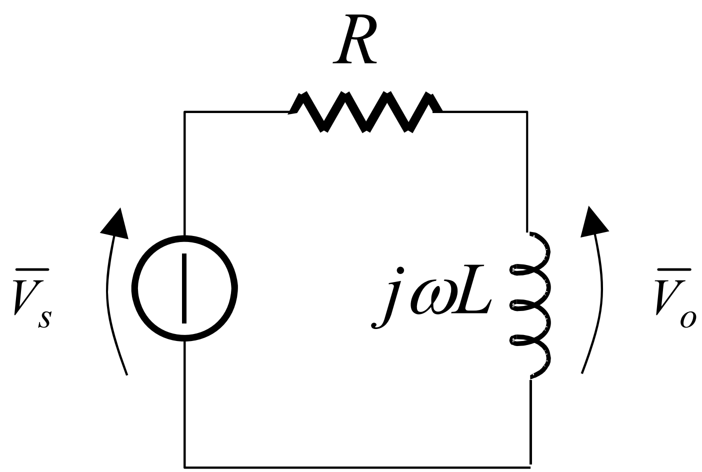


Ottenere la funzione Vo/Vs del circuito RL, assumendo $v_s = V_m \cos\omega t$.

Disegnare la sua risposta in frequenza.

Soluzione

Nel dominio della frequenza il circuito diventa

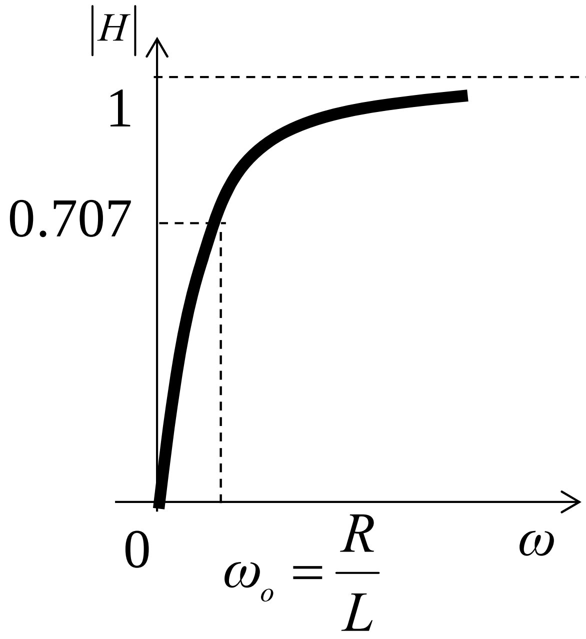


La funzione di trasferimento è

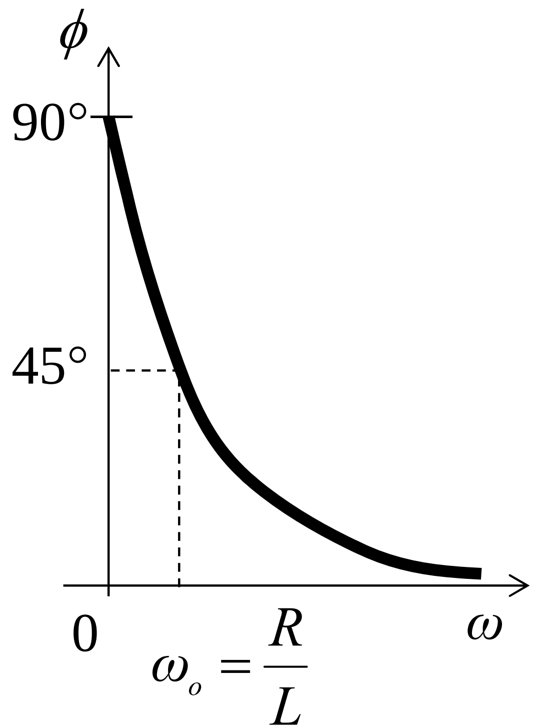
$$\dot{H}(\omega) = \frac{\overline{V}_o}{\overline{V}_s} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 + \frac{R}{j\omega L}}$$

$$\omega_o = R/L$$

$$\dot{\mathrm{H}}(\omega) = \frac{1}{1 - j\dfrac{\omega_0}{\omega}}$$

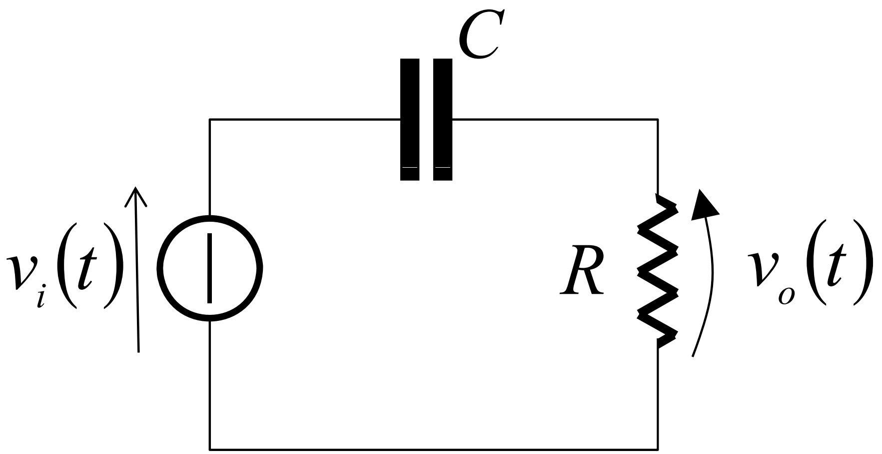


L'ampiezza è $\left|\mathrm{H}(\omega)\right| = \dfrac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\omega_o}{\omega})^2}}$



La fase è $\phi = \tan^{-1} \dfrac{\omega_0}{\omega},$

Filtro passa-alto



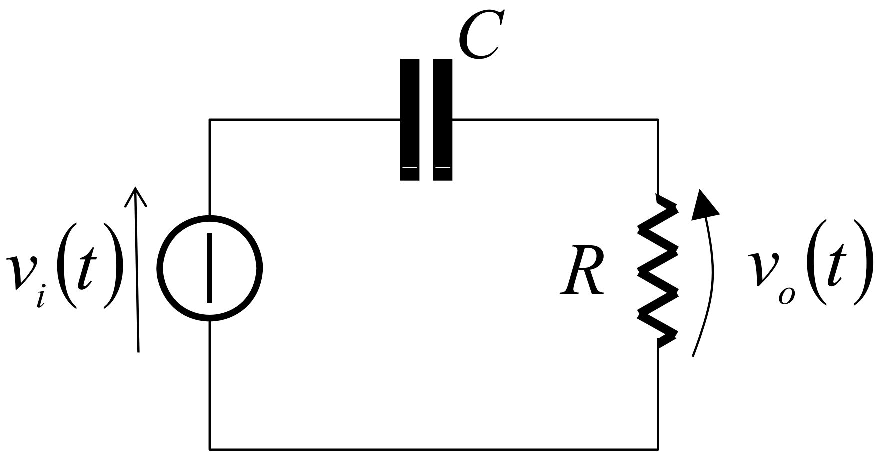
$$\dot{H}(\omega) = \frac{\overline{V}_o}{\overline{V}_s} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

ponendo $\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$

$$\left|\dot{H}(\omega)\right| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} = \frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

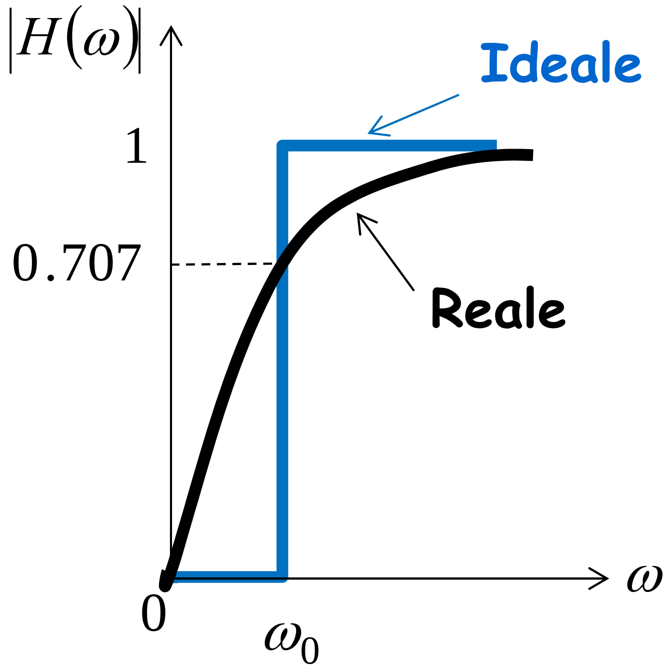
$$\phi = \tan^{-1}\frac{\omega_0}{\omega}$$

Filtro passa-alto



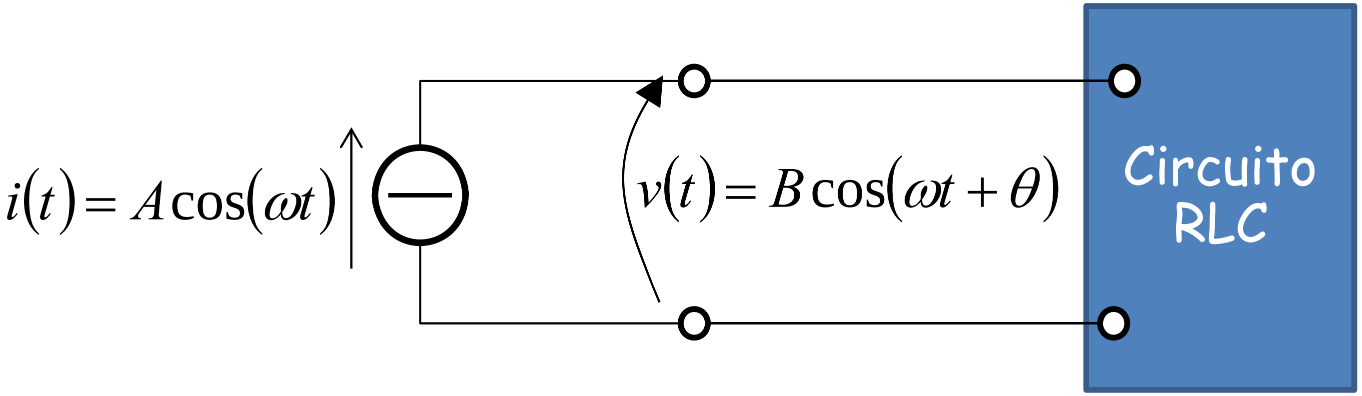
$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

Risposta in frequenza ideale e reale di un filtro bassa-alto



Un filtro passa-alto è progettato per lasciar passare tutte le frequenze superiori alla sua alla frequenza di taglio ω_0

La risonanza



Funzione di rete $\dot{H}(\omega) = \dfrac{\overline{V}}{\overline{I}} = \dot{Z}(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$

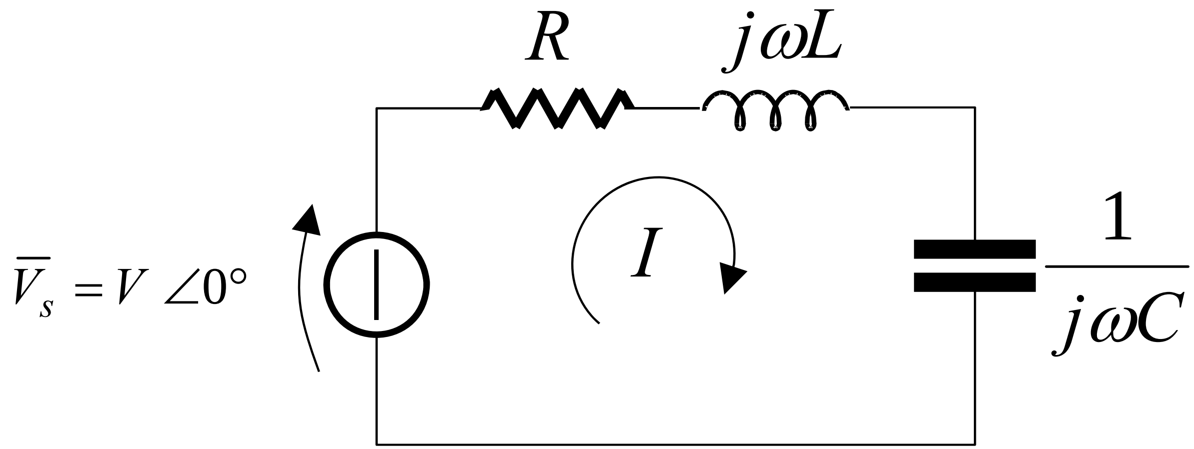
Al variare di ω, può essere $X(\omega)\begin{cases} >0 \\ =0 \\ <0 \end{cases}$

Per $\omega = \omega_0$ (ω_0 pulsazione di risonanza) l'impedenza e' puramente resistiva:

Z=R, X=0

Si ha risonanza in qualunque sistema che possiede una coppia di poli complessi coniugati

Risonanza Serie



$$\dot{Z} = R + j\left(\omega\, L - \frac{1}{\omega\, C}\right)$$

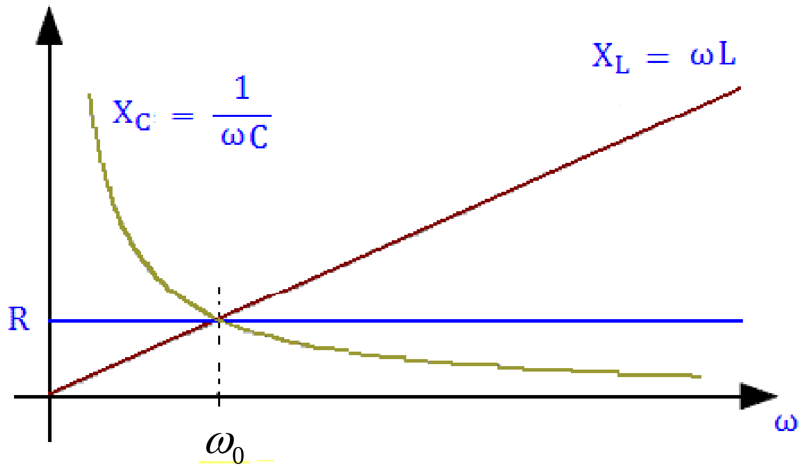
$$\left|\dot{Z}\right| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{\omega\, L - \dfrac{1}{\omega\, C}}{R}$$

Pulsazione di risonanza:

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} rad/s \qquad \text{o}$$

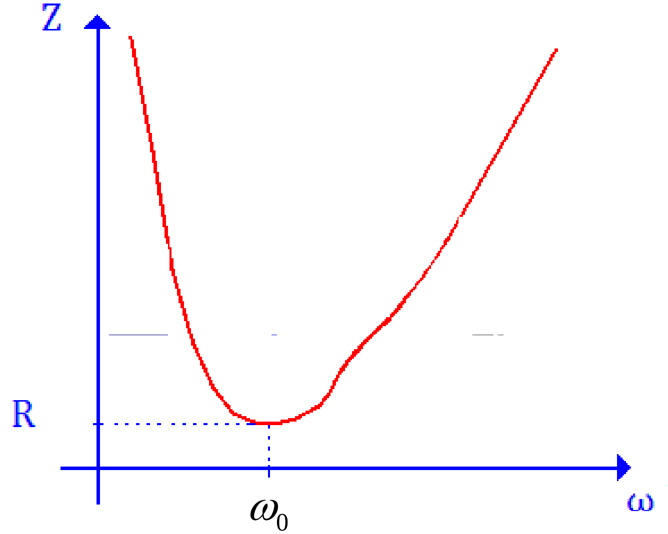
$$f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} Hz$$

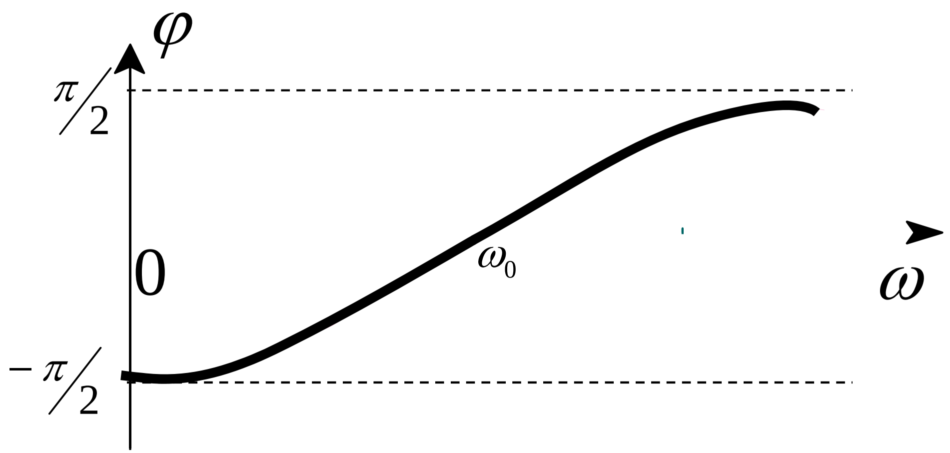


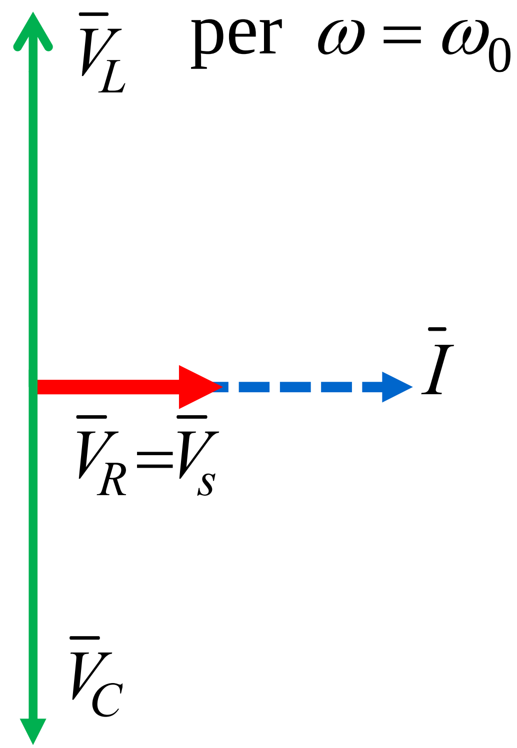
$$\text{per}\ \ \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad |Z| = R \quad \varphi = 0$$

$$\text{per}\ \ \omega = 0 \qquad |Z| = \infty \qquad \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

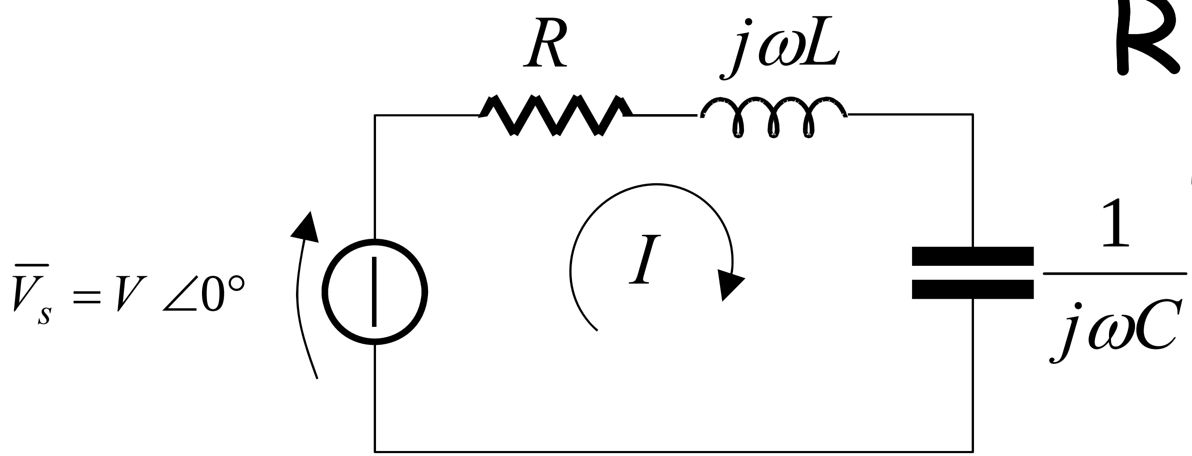
$$\text{per}\ \ \omega \to \infty \qquad |Z| \to \omega L \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$$





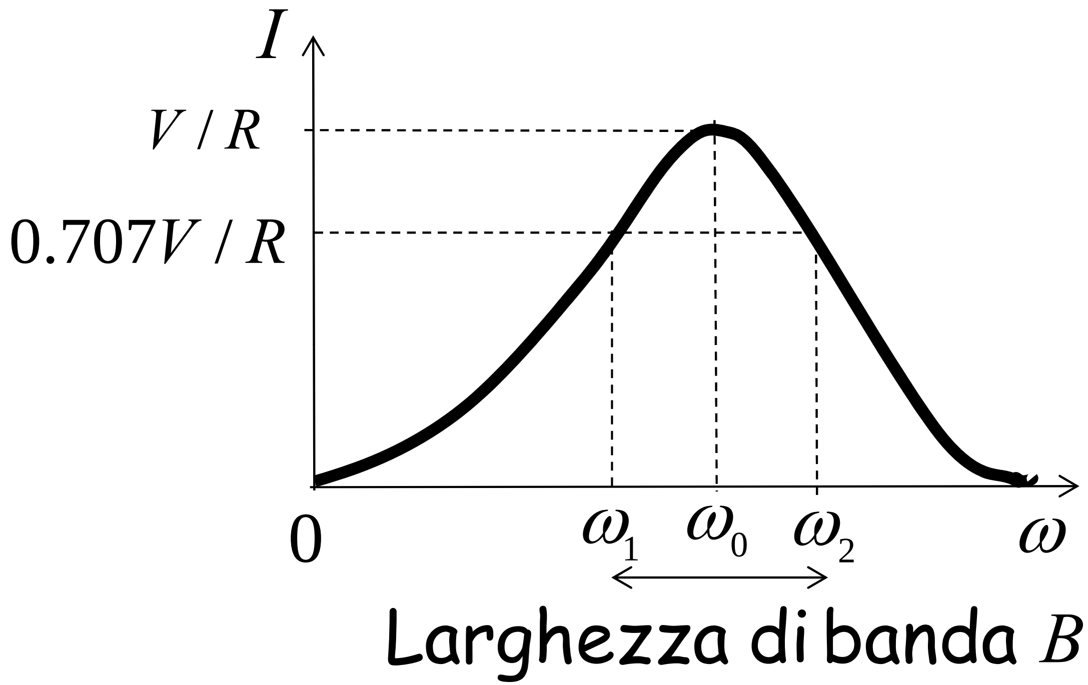


Risonanza Serie



La risposta in frequenza è

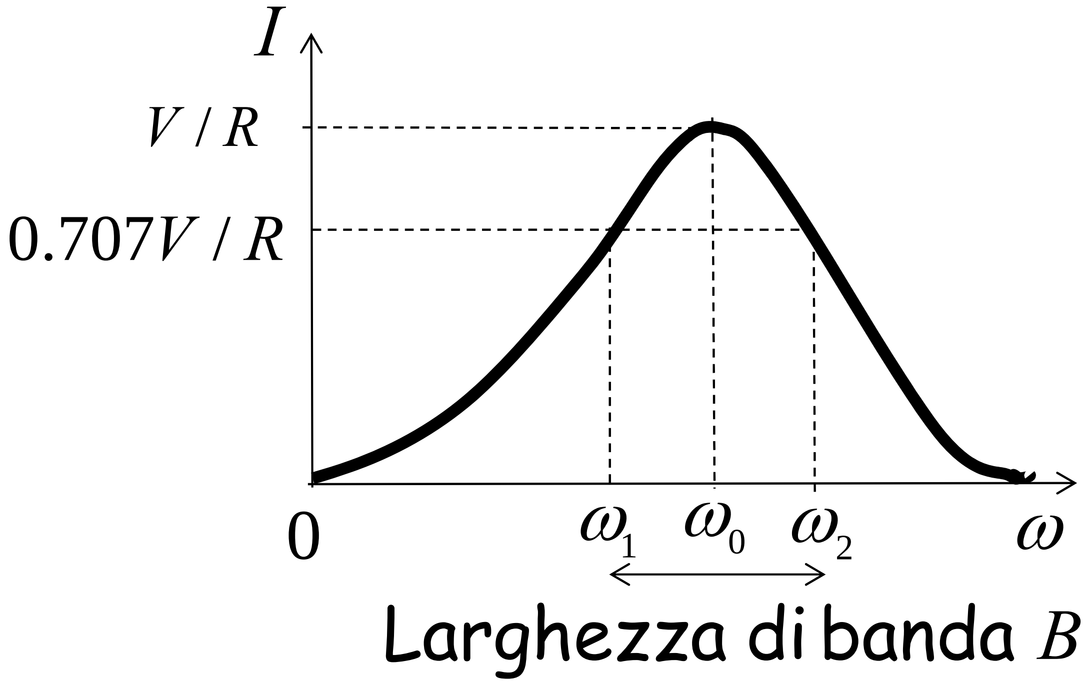
$$\mathrm{I} = |\,\mathrm{I}\,| = \frac{\mathrm{V}}{\sqrt{\mathrm{R}^2 + (\omega\,\mathrm{L} - 1/\omega\,\mathrm{C})^2}}$$



La potenza attiva assorbita dal circuito RLC è $\mathrm{P}(\omega) = \mathrm{RI}^2(\varpi)$

La piu' alta potenza dissipata si ha alla risonanza: $\mathrm{P}(\omega_o) = \dfrac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{R}}$

Risonanza serie



Le pulsazioni di metà potenza (pulsazioni di taglio) ω_1 e ω_2 sono le pulsazioni in corrispondenza delle quali la potenza dissipata è metà del valore massimo

$$\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}=\sqrt{2}\cdot R$$

$$\omega_1=-\frac{R}{2L}+\sqrt{(\frac{R}{2L})^2+\frac{1}{LC}}\qquad \omega_2=\frac{R}{2L}+\sqrt{(\frac{R}{2L})^2+\frac{1}{LC}}\qquad \omega_o=\sqrt{\omega_1\cdot\omega_2}$$

Larghezza di banda $B=\omega_2-\omega_1$

Dimostrazione

$$\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}=\sqrt{2}\cdot R \Rightarrow \left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2=R^2$$

$$\omega L-\frac{1}{\omega C}=\pm R \Rightarrow \begin{cases} \varpi^2+\frac{R}{L}\varpi-\frac{1}{LC}=0 \\ \varpi^2-\frac{R}{L}\varpi-\frac{1}{LC}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varpi=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2+\frac{1}{LC}} \\ \varpi=+\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2+\frac{1}{LC}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varpi_1=-\frac{R}{2L}+\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2+\frac{1}{LC}} \\ \varpi_2=+\frac{R}{2L}+\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2+\frac{1}{LC}} \end{cases}$$

Le altre due soluzioni si scartano perché negative

$$\varpi_1\cdot\varpi_2=\left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2+\frac{1}{LC}}\right)^2-\left(\frac{R}{2L}\right)^2=\frac{1}{LC}\Rightarrow \omega_0^2=\sqrt{\varpi_1\cdot\varpi_2}$$

Risonanza serie

Alla risonanza l'impedenza è reale e vale *R* $\bar{I} = \dfrac{\bar{V}_s}{R}$

Il modulo di *Z* è minimo → il modulo della corrente è massimo

La serie LC ha impedenza nulla, quindi equivale ad un corto circuito

$$\bar{V}_C + \bar{V}_L = 0 \quad \bar{V}_L = -\bar{V}_C = j\omega_0 L\bar{I} = j\frac{\omega_0 L}{R}\bar{V}_s = jQ\bar{V}_s$$

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$ Fattore di qualità

$$\bar{V}_L = \left|\bar{V}_C\right| = Q\left|\bar{V}_s\right|$$

Quando **Q** assume valori elevati, $v_L(t)$ e $v_C(t)$ assumono ampiezze maggiori di quella del generatore

→ problemi di sovratensioni.

Fattore di qualità (o di merito)

$$Q = 2\pi \cdot \frac{\text{Energia reattiva immagazzinata nel circuito alla risonanza}}{\text{Energia dissipata nel circuito in un periodo alla risonanza}}$$

Il fattore di qualità può essere considerato come la capacità di immagazzinare energia in rapporto alla dissipazione di energia

Un circuito risonante con elevato fattore di qualità Q richiede meno energia per ogni ciclo di funzionamento

Dimostrazione

$$W_L = \frac{1}{2} L i^2(t) = \frac{1}{2} L\left(\sqrt{2}\frac{V}{R}\cos(\omega_0 t)\right)^2 = \frac{L}{R^2} V^2 \cos^2(\omega_0 t)$$

Energia immagazzinata nell'induttore

$$W_C = \frac{1}{2} C v^2(t) = \frac{1}{2} C\left(2\frac{V^2}{\omega_0^2 R^2 C^2}\cos^2(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})\right) = \frac{V^2}{\omega_0^2 R^2 C}\sin^2(\omega_0 t) =$$

$$= \frac{L}{R^2} V^2 \sin^2(\omega_0 t)$$

Energia immagazzinata nel capacitore

$$W_Q = \frac{L}{R^2} V^2 \left(\sin^2(\omega_0 t) + \cos^2(\omega_0 t)\right) = \frac{L}{R^2} V^2$$

Energia reattiva complessiva

L'energia reattiva è costante nel tempo e viene scambiata tra L e C all'interno della serie

Dimostrazione (cnt.)

$$W_R = R \cdot I^2 \cdot T = R \cdot \frac{V^2}{R^2} \cdot T = R \cdot \frac{V^2}{R^2} \cdot \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{V^2}{R} \cdot \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Energia dissipata nel resistore alla risonanza in un ciclo di periodo T

$$\frac{W_Q}{W_R} = \frac{\frac{L}{R^2} V^2}{\frac{V^2}{R} \cdot \frac{2\pi}{\omega_0}} = \frac{Q}{2\pi} \Rightarrow Q = 2\pi \cdot \frac{W_Q}{W_R}$$

Il rapporto tra le energie dipende dal fattore di qualità Q   c.v.d.

Fattore di qualità (o di merito)

Circuito RLC serie $$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

L'impedenza può essere scritta:

$$Z = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = R\left[1 + j\frac{\omega_0 L}{R}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]$$

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{\dot{I}}{\dot{V}_g} = \frac{G}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

→ Ricalca l'andamento della corrente

Al variare del fattore di merito varia l'andamento della Y e quindi della corrente.

ω_1 e ω_2 sono le pulsazioni di taglio, in corrispondenza delle quali:

$$\frac{\left|\dot{Y}(j\omega_2)\right|}{G} = \frac{\left|\dot{Y}(j\omega_1)\right|}{G} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = \pm 1$$

$Y_{max} = G$

Prendendo, delle 4 soluzioni, quelle positive:

$$\omega_{1,2} = \omega_0\left[\sqrt{1+\frac{1}{4Q^2}} \mp \frac{1}{2Q}\right]$$

$$\omega_1\omega_2 = \omega_0^2 \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2}$$

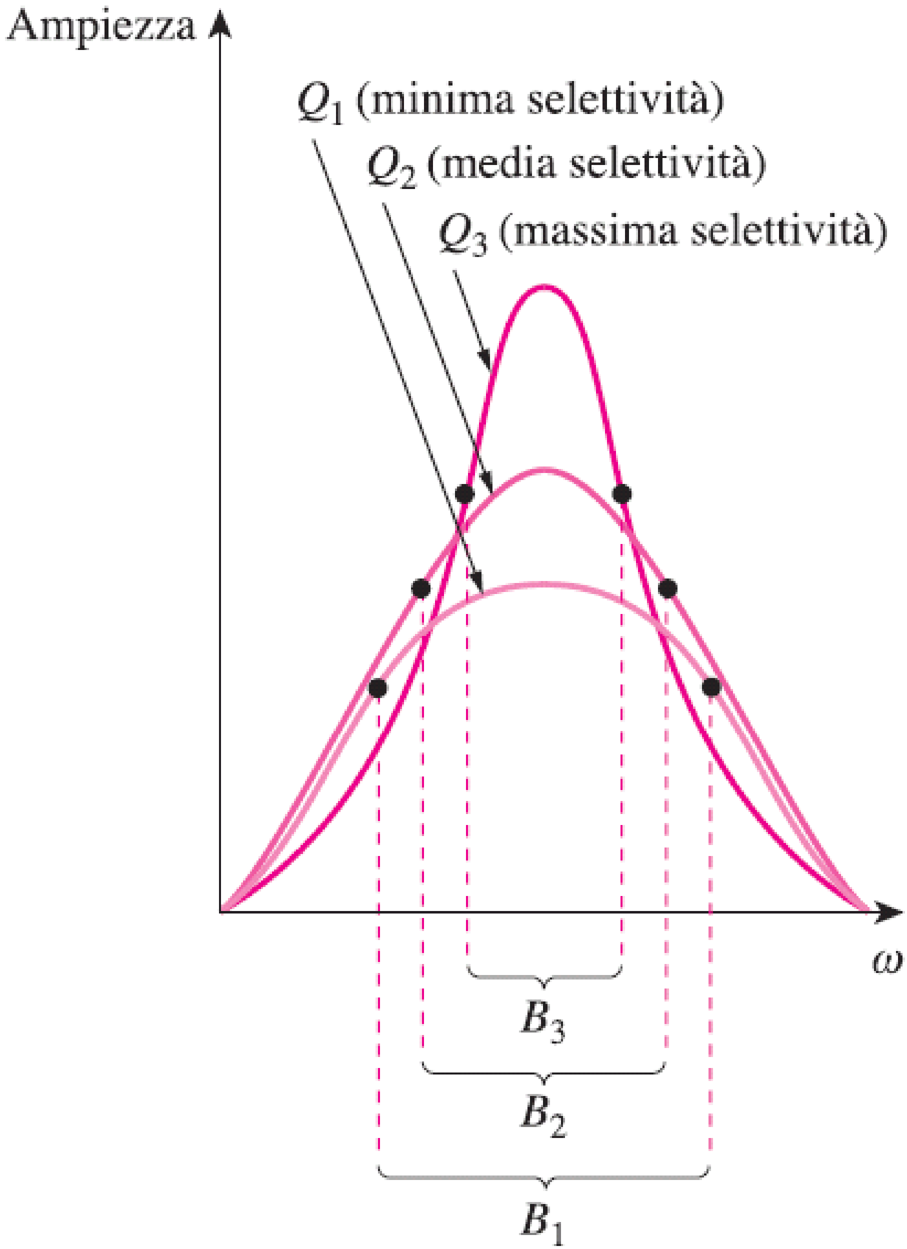
Le pulsazioni di taglio non sono simmetriche rispetto a ω_0:

$$\omega_{1,2} \cong \omega_0 \mp \frac{\omega_0}{2Q} \rightarrow \text{si possono considerare simmetriche}$$

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q} = B \quad \text{Ampiezza di Banda}$$

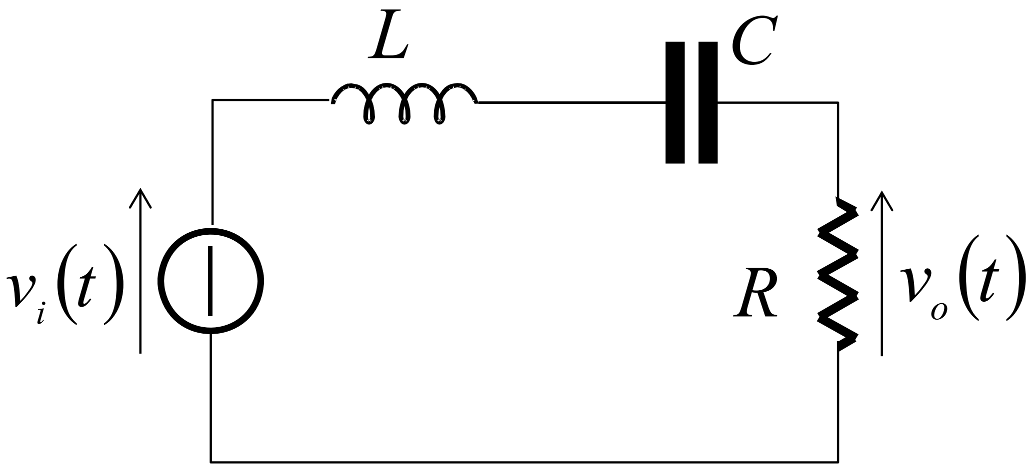
Fissato ω_0, tanto piu' elevato è Q tanto più stretta è B.

Tanto più grande è **Q** tanto più selettivo è il circuito ma tanto più stretta è la larghezza di banda.



$$\boxed{\omega_1 \approx \omega_0 - \frac{B}{2}, \quad \omega_2 \approx \omega_0 + \frac{B}{2}}$$

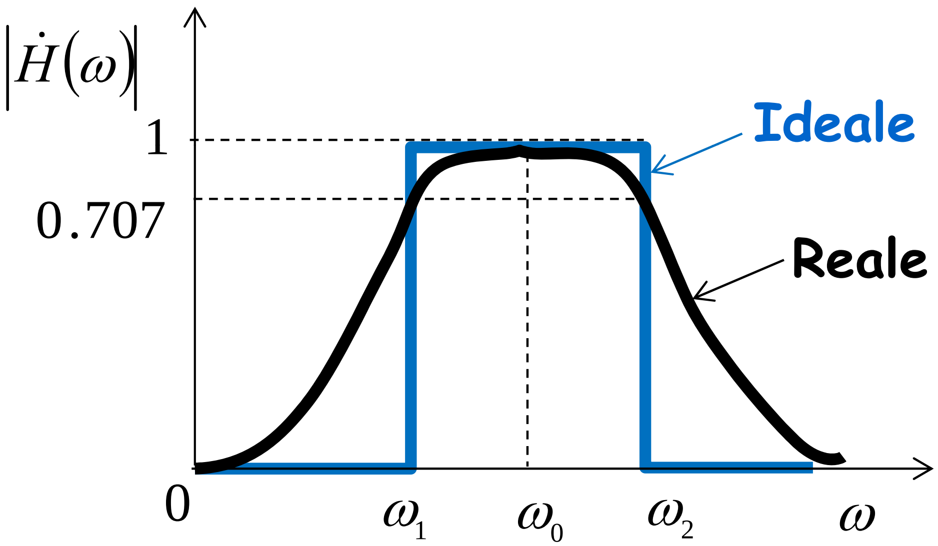
Filtro passa-banda



$$H(j\omega)=\frac{V_0}{V_i}=\frac{R}{R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}$$

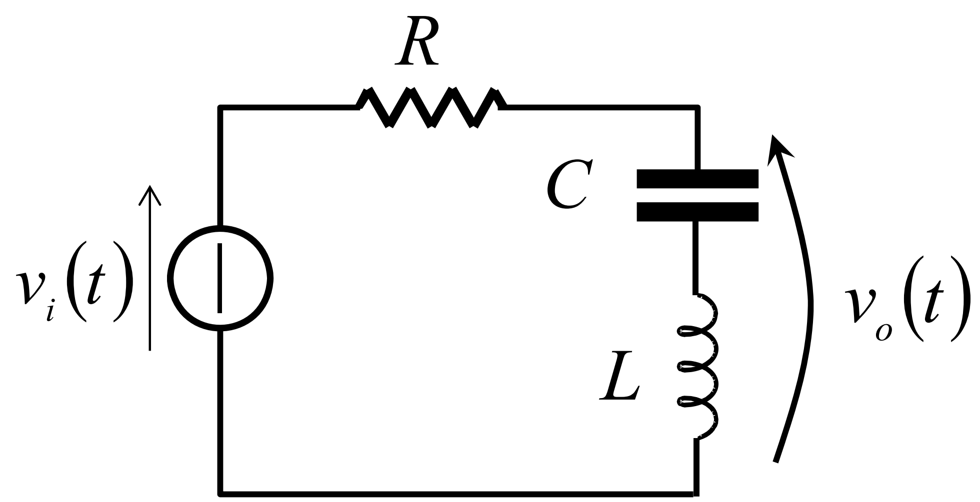
$$\left|H(j\omega)\right|=\left|\frac{R}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}\right|$$

Risposta in frequenza ideale e reale di un filtro bassa-banda



Un filtro passa-banda è progettato per lasciar passare tutte le frequenze contenute all'interno di una banda di frequenze, $\omega_1<\omega<\omega_2$

Filtro arresta-banda



$$\dot{H}(j\omega) = \frac{\overline{V}_0}{\overline{V}_i} = \frac{j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

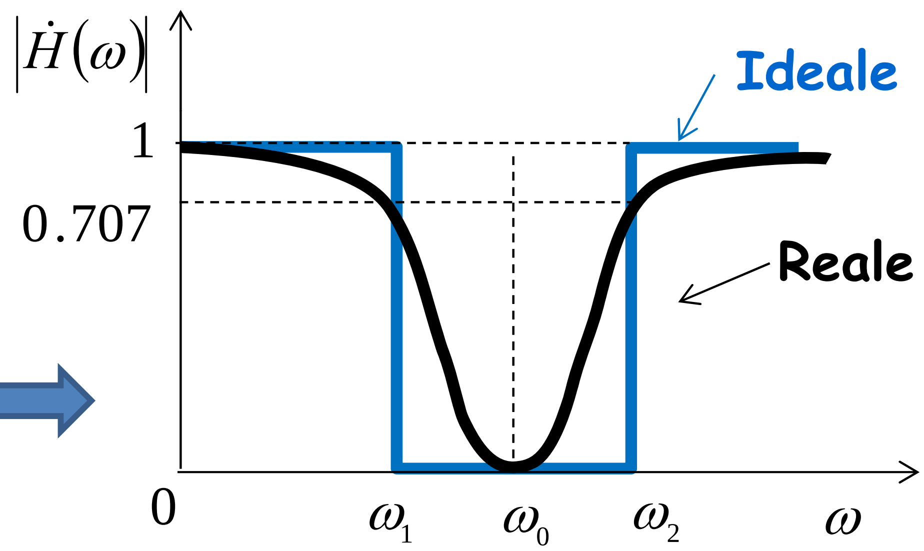
$$\left|\dot{H}(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}}$$

$$\omega = 0 \Rightarrow H(0) = 1 \qquad \omega \to \infty \Rightarrow H(\infty) = 1$$

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \to H(\omega_0) = 0$$

ω_0=Frequenza di centro banda o di reiezione

Risposta in frequenza ideale e reale di un filtro arresta-banda

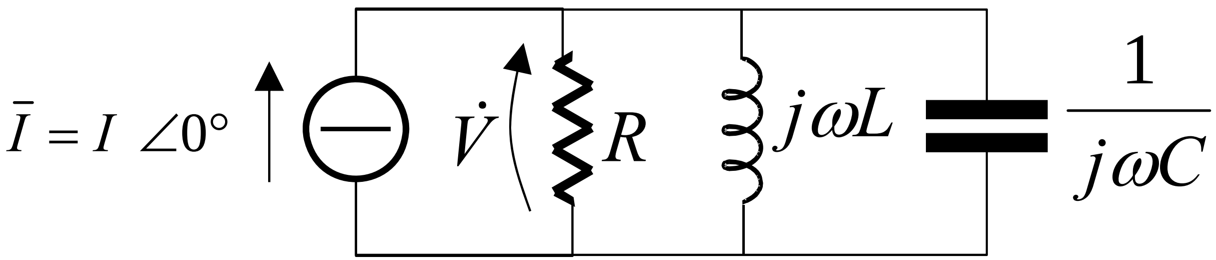


ω_1 e ω_2 sono le stesse del circuito risonante serie

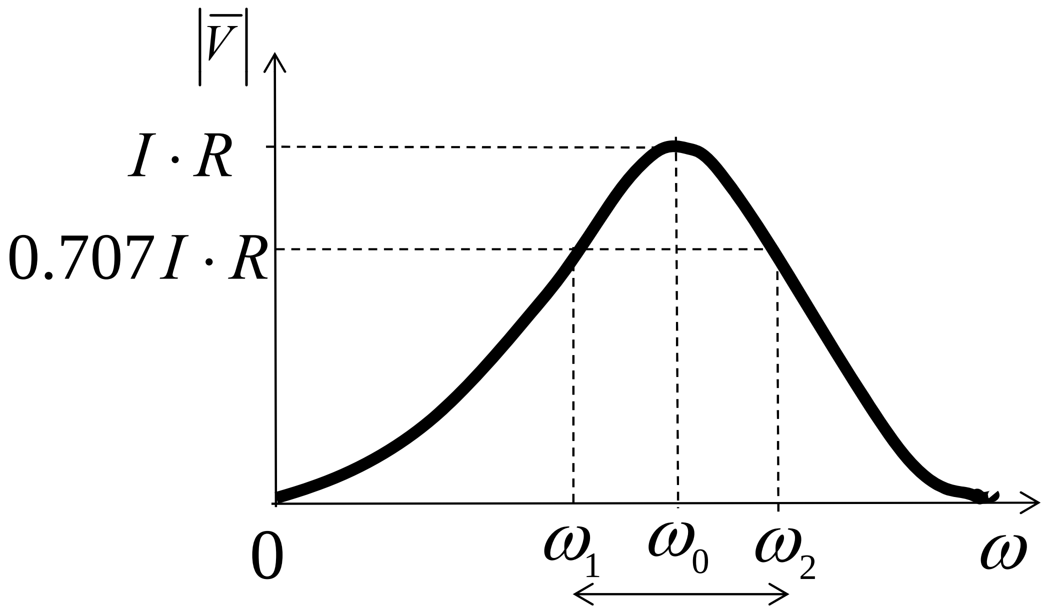
$$\omega_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \qquad \omega_2 = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

Risonanza parallelo

Si verifica quando la parte immaginaria di Y è zero



$$\dot{Y} = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$



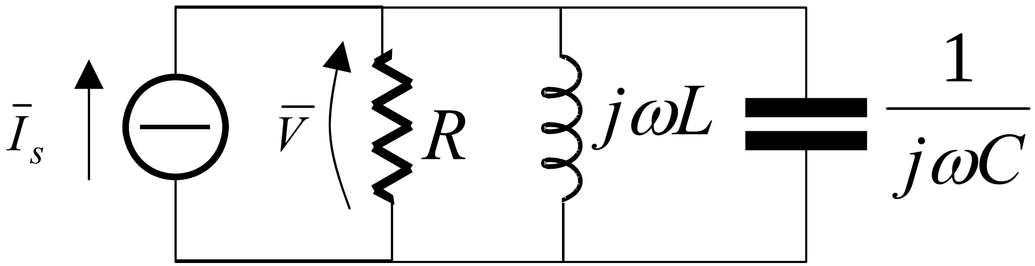
Larghezza di banda B

Pulsazione di risonanza:

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{rad/s} \quad \text{o}$$

$$f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} Hz$$

Circuito risonante parallelo



$$\dot{H}(j\omega) = \dot{Z} = \frac{\overline{V}}{\overline{I}_s} = \frac{1}{\dot{Y}} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}$$

$$\dot{Y} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} \angle \tan^{-1} R\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Alla risonanza l'ammettenza è reale e vale *1/R* $\bar{V} = \bar{I}_s R$

Il modulo di *Y* è minimo → il modulo della tensione è massimo

Il parallelo LC ha ammettenza nulla, quindi equivale ad un circuito aperto.

$$\bar{I}_C + \bar{I}_L = 0 \quad \bar{I}_L = -\bar{I}_C = \frac{\bar{V}}{j\omega_0 L} = \frac{-j\bar{I}_s R}{\omega_0 L} = -j\frac{R}{\omega_0 L}\bar{I}_s = -jQ\bar{I}_s$$

$$Q = \frac{R}{\omega_0 L} = \omega_0 CR$$ Fattore di qualità

$$\left|\bar{I}_L\right| = \left|\bar{I}_C\right| = Q\left|\bar{I}_s\right|$$

Se **Q** assume valori elevati $i_L(t)$ e $i_C(t)$ assumono ampiezze maggiori di quella del generatore

→ problemi di sovracorrenti

Circuito risonante parallelo

$$\omega_1 = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

Frequenze di taglio

$$B = \omega_2 - \omega_1 = \frac{1}{RC}$$

Larghezza di banda

$$Q = \frac{\omega_0}{B} = \omega_0 RC = \frac{R}{\omega_0 L}$$

Fattore di qualità

$$\omega_1 \approx \omega_0 - \frac{B}{2}, \quad \omega_2 \approx \omega_0 + \frac{B}{2}$$

Risonanza serie e parallelo

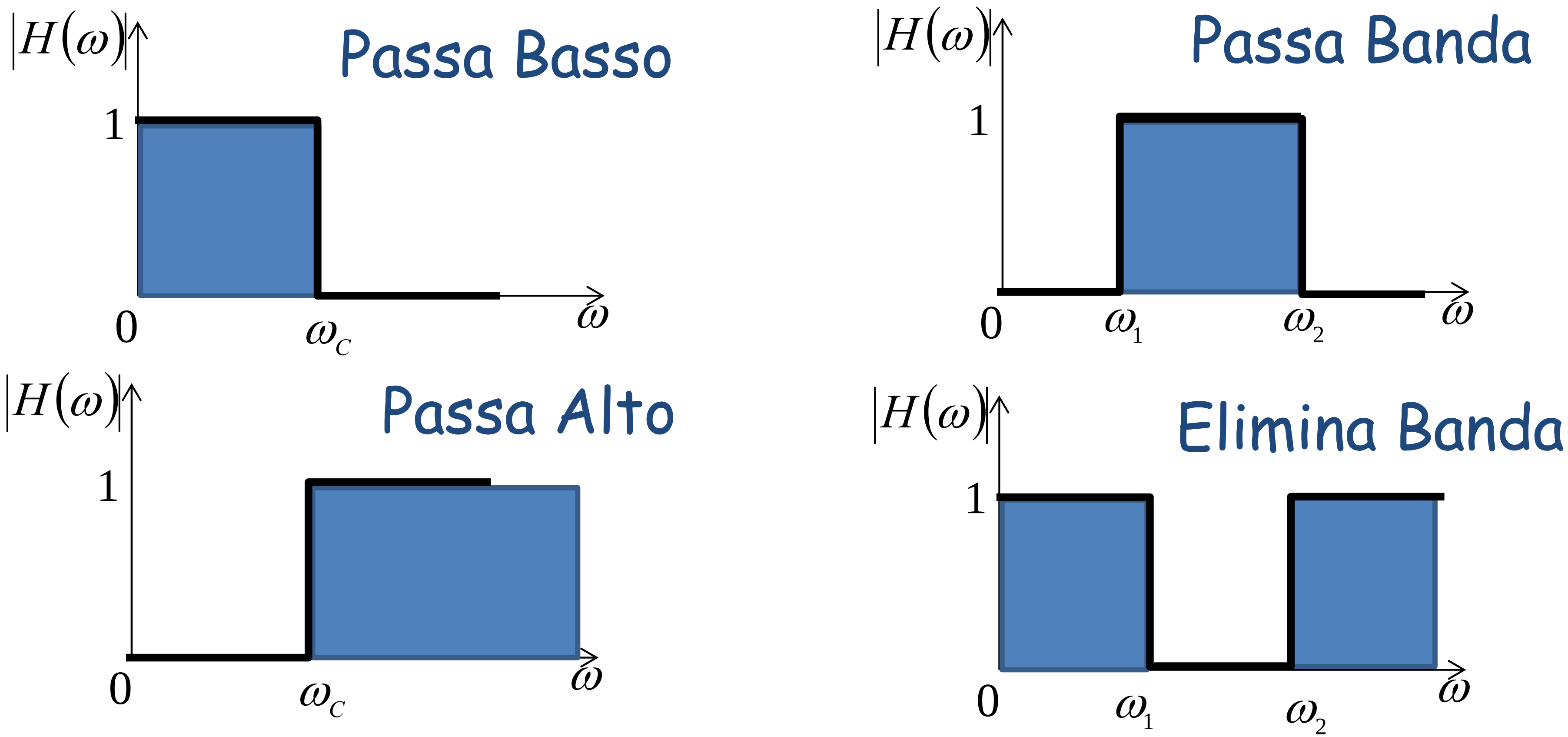
Caratteristica	*Circuito serie*	*Circuito parallelo*
$\boldsymbol{\omega_o}$	$\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$
Q	$\dfrac{\omega_o L}{R}$ or $\dfrac{1}{\omega_o RC}$	$\dfrac{R}{\omega_o L}$ or $\omega_o RC$
B	$\dfrac{\omega_o}{Q}$	$\dfrac{\omega_o}{Q}$
$\boldsymbol{\omega_1,\ \omega_2}$	$\omega_o\sqrt{1+(\dfrac{1}{2Q})^2} \pm \dfrac{\omega_o}{2Q}$	$\omega_o\sqrt{1+(\dfrac{1}{2Q})^2} \pm \dfrac{\omega_o}{2Q}$
$\mathbf{Q \geq 10,\ \boldsymbol{\omega_1,\ \omega_2}}$	$\omega_o \pm \dfrac{B}{2}$	$\omega_o \pm \dfrac{B}{2}$

Filtri passivi

- Un FILTRO è un circuito progettato per trasmettere segnali a desiderate frequenze e eliminare o attenuare segnali ad altre frequenze.

- Un filtro passivo è costituito solo da elementi passivi R, L e C.

- Ci sono 4 tipi di filtri.

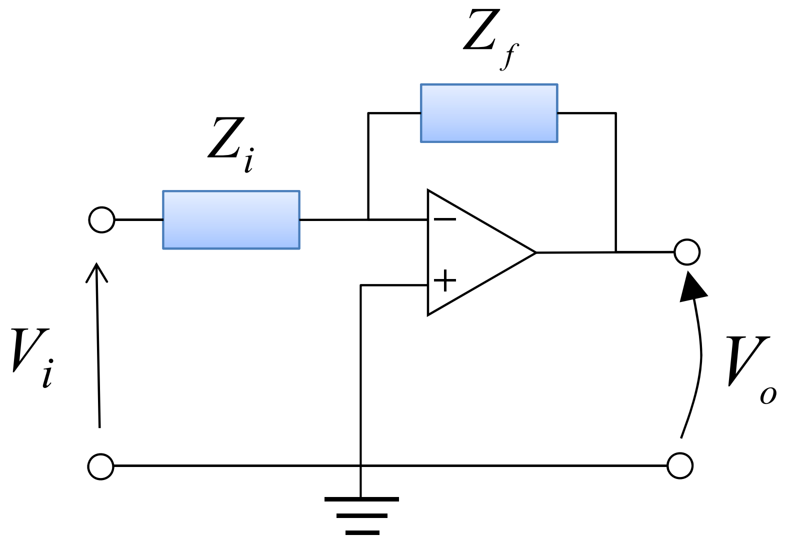


Vantaggi e Limiti dei filtri passivi

- Molto utilizzati nei ricevitori audio e TV, negli equalizzatori, nelle reti per l'adattamento di impedenza, nelle reti per il condizionamento del segnale e per la ripartizione della potenza elettrica, negli attuatori e negli accoppiatori direzionali.
- Non necessitano di alimentazione, e hanno ottime caratteristiche di stabilità e precisione
- Buone prestazioni per le alte frequenze
- Non possono avere guadagno maggiore di 1
- Possono richiedere l'impiego di grossi e costosi induttori
- Non hanno buone prestazioni per frequenze al di sotto della banda audio (3000 Hz-300kHz)

Filtri Attivi

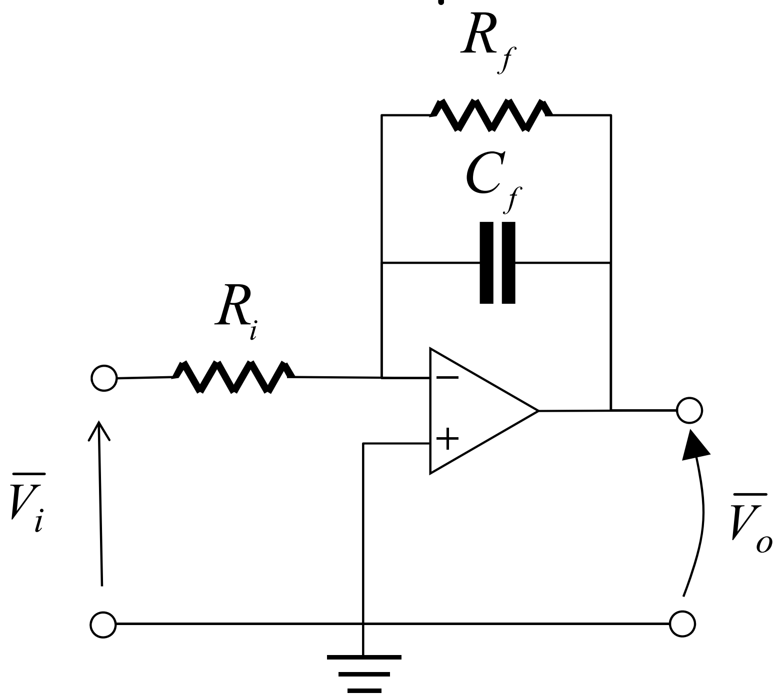
Filtro attivo generico del primo ordine



$$\dot{H}(j\varpi) = \frac{\overline{V}_0}{\overline{V}_i} = -\frac{\dot{Z}_f}{\dot{Z}_i}$$

Configurazione da amplificatore invertente

Filtro attivo passa-basso del I ordine



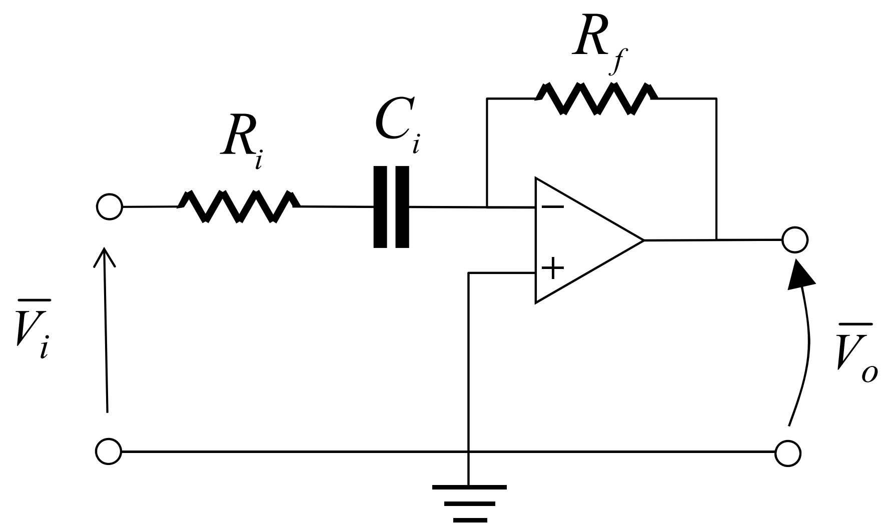
$$\dot{Z}_i = R_i \qquad \dot{Z}_f = R_f \,//\, \frac{1}{j\varpi C_f} = \frac{R_f \cdot \frac{1}{j\varpi C_f}}{R_f + \frac{1}{j\varpi C_f}} = \frac{R_f}{1 + j\varpi R_f C_f}$$

$$\dot{H}(j\varpi) = -\frac{R_f}{R_i} \cdot \frac{1}{1 + j\varpi R_f C_f}$$

$$\omega_C = \frac{1}{R_f C_f}$$

Filtri Attivi

Filtro attivo passa-alto del I ordine



$$\dot{H}(j\varpi) = \frac{\overline{V_0}}{\overline{V_i}} = -\frac{\dot{Z}_f}{\dot{Z}_i}$$

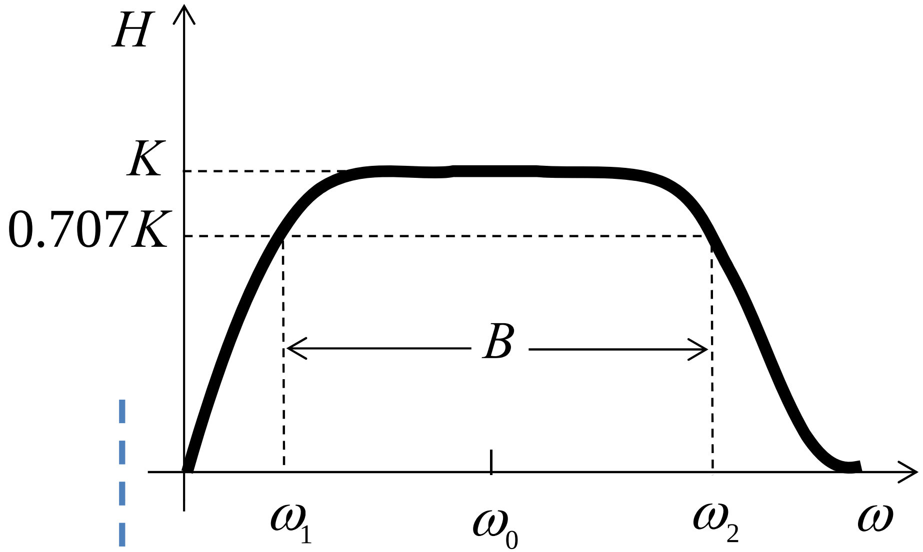
$$\dot{Z}_i = R_i + \frac{1}{j\varpi C_i} \qquad \dot{Z}_f = R_f$$

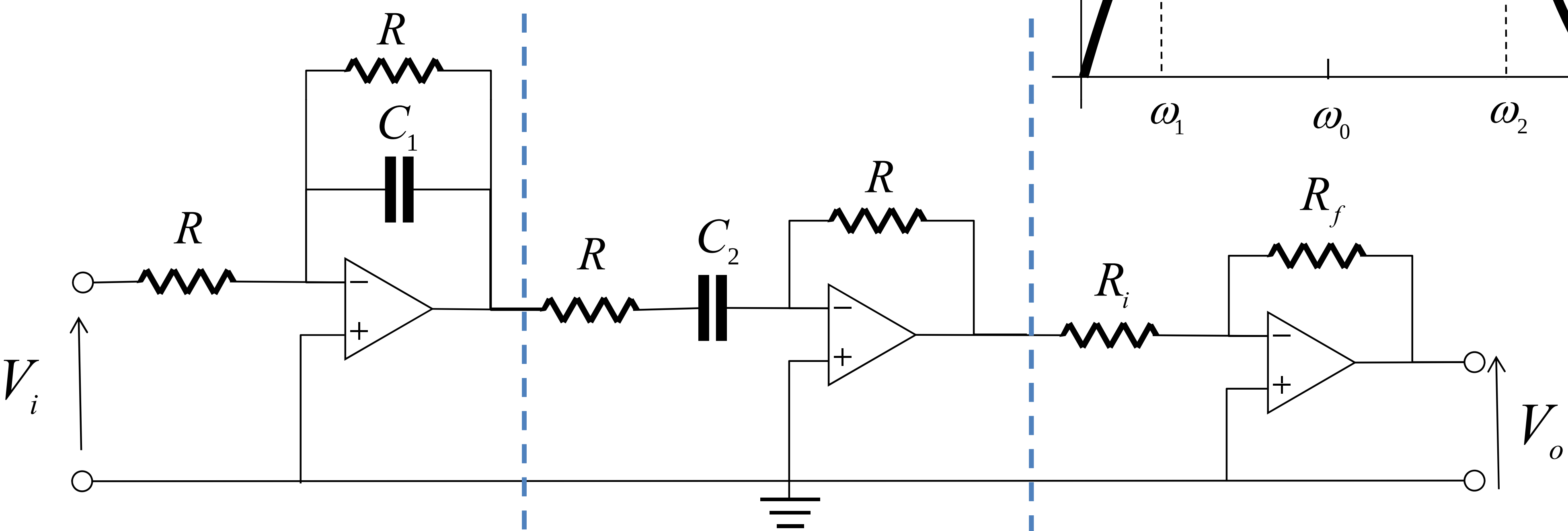
$$\dot{H}\left(j\varpi\right) = -\frac{R_f}{R_i + \dfrac{1}{j\varpi C_i}} = -\frac{j\varpi C_i R_f}{1 + j\varpi R_i C_i} \Rightarrow \left|\dot{H}\left(j\varpi\right)\right| = \frac{\varpi C_i R_f}{\sqrt{1 + (\varpi R_i C_i)^2}}$$

$$\omega_C = \frac{1}{R_i C_i}$$

Filtro attivo passa-banda

$$\omega_2 = \frac{1}{RC_1} \qquad \omega_1 = \frac{1}{RC_2}$$





Stadio 1
Filtro passa-basso
definisce ω_2

Stadio 2
Filtro passa-alto
definisce ω_1

Stadio 3
Invertitore
fissa il guadagno

Funzione di Trasferimento

$$\dot{H}(j\varpi)=\frac{\overline{V_0}}{\overline{V_i}}=\left(-\frac{1}{1+j\varpi RC_1}\right)\cdot\left(-\frac{j\varpi C_2 R}{1+j\varpi RC_2}\right)\cdot\left(-\frac{R_f}{R_i}\right)=-\frac{R_f}{R_i}\cdot\frac{1}{1+j\varpi RC_1}\cdot\frac{j\varpi C_2 R}{1+j\varpi RC_2}$$

Stadio passa basso $\omega_2=\dfrac{1}{RC_1}$ Stadio passa alto $\omega_1=\dfrac{1}{RC_2}$

Pulsazione di centro banda $\omega_0=\sqrt{\varpi_1\cdot\varpi_2}$ Banda $B=\varpi_2-\varpi_1$ $Q=\dfrac{\varpi_0}{B}$

Guadagno $G=\left|\dot{H}(j\varpi)\right|=\dfrac{R_f}{R_i}\cdot\dfrac{\varpi_2}{\varpi_1+\varpi_2}$

$$\dot{H}(j\varpi)==-\frac{R_f}{R_i}\cdot\frac{1}{1+j\dfrac{\varpi}{\varpi_2}}\cdot\frac{j\dfrac{\varpi}{\varpi_1}}{1+j\dfrac{\varpi}{\varpi_1}}=-\frac{R_f}{R_i}\cdot\frac{j\varpi\varpi_2}{(\varpi_2+j\varpi)(\varpi_1+j\varpi)}$$

$$\dot{H}(j\varpi_0)=-\frac{R_f}{R_i}\cdot\frac{j\varpi_0\varpi_2}{j\varpi_0\varpi_1+j\varpi_0\varpi_2}\Rightarrow G=\left|\dot{H}(j\varpi_0)\right|=\frac{R_f}{R_i}\cdot\frac{\varpi_2}{\varpi_1+\varpi_2}$$

Esercizio

Dato un circuito RLC serie, in cui e' R = 100 Ω, L = 0.5 H, C = 40μF, si calcolino la frequenza di risonanza e le frequenze di taglio ω_1 e ω_2

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 223.6\ rad/s \approx 224\ rad/s \qquad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 35.6 Hz$$

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = 1.12$$

$$\omega_2 = \omega_0 \left[\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} + \frac{1}{2Q} \right] = 345 rad/s$$

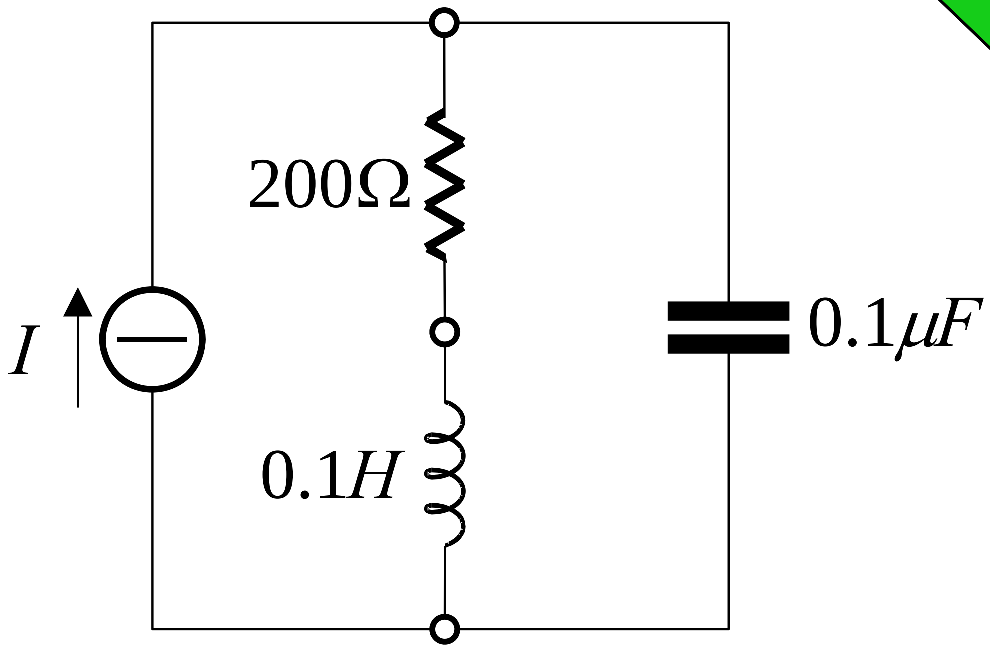
$$\omega_1 = \omega_0 \left[\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} - \frac{1}{2Q} \right] = 145 rad/s$$

$$B = \omega_2 - \omega_1 = 200 rad/s = \frac{\omega_0}{Q} = 200 rad/s$$

$$\sqrt{\omega_2 \cdot \omega_1} = 224 = \omega_0$$

Esercizio

Determinare la frequenza di risonanza del circuito di figura



Calcoliamo l'ammettenza in ingresso:

$$\dot{Y} = \frac{1}{R + j\omega L} + j\omega C = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}\right)$$

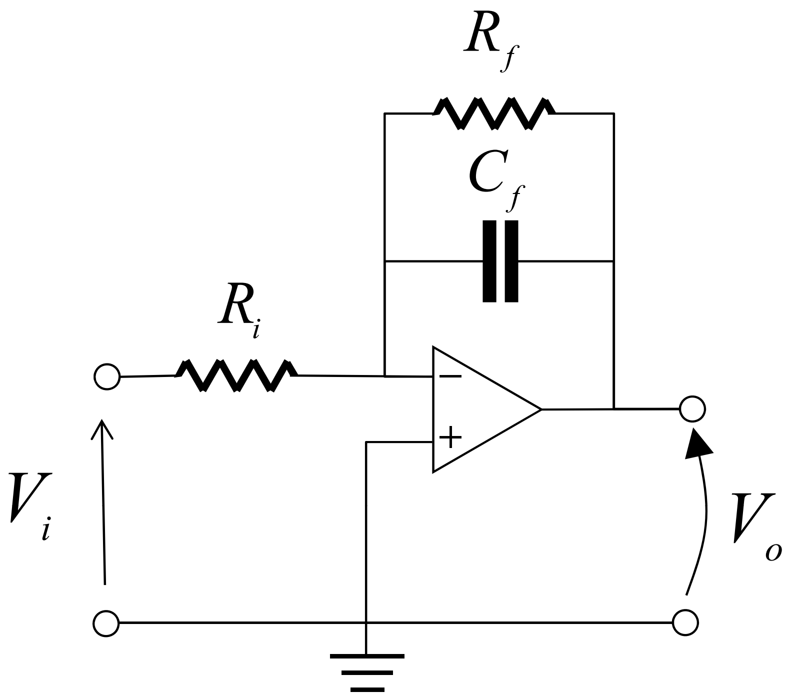
In condizioni di risonanza la parte immaginaria di Y deve essere nulla

$$\frac{\omega_0 L}{R^2 + {\omega_0}^2 L^2} = \omega_0 C \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1 - \frac{R^2 C}{L}}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{0.1 \cdot 0.1 \cdot 10^{-6}}}\sqrt{1 - \frac{\sqrt{200^2 \cdot 0.1 \cdot 10^{-6}}}{0.1}} = 9798 rad/s$$

Esercizio

Progettare un filtro attivo passa-basso che realizzi un guadagno in continua pari a 4 e una frequenza di taglio ω_C=500Hz.



$$\begin{cases} \omega_c = \dfrac{1}{R_f C_f} = 2\pi \cdot 500 \\ H(0) = -\dfrac{R_f}{R_i} = -4 \end{cases}$$

Abbiamo un grado di libertà. Scegliamo $C_f = 0{,}2\mu F$ da cui

$$R_f = \frac{1}{2\pi \cdot f_C \cdot C_f} = \frac{1}{2\pi \cdot 500 \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-6}} = 1{,}59k\Omega \qquad R_i = \frac{R_f}{4} = 397{,}5\Omega$$

$\Rightarrow$ **scegliamo** $R_f = 1{,}6k\Omega; \quad C_f = 0{,}2\,\mu F; \quad R_i = 400\Omega$

Esercizio

Progettare un filtro attivo passa-banda che lasci passare le frequenze comprese tra 250Hz e 3kHz e con guadagno paro a 10. Utilizzare R=20kΩ.

$$\omega_1 = \frac{1}{RC_2} \Rightarrow C_2 = \frac{1}{2\pi \cdot f_1 \cdot R} = \frac{1}{2\pi \cdot 250 \cdot 20 \cdot 10^3} = 31.83nF$$

$$C_1 = \frac{1}{2\pi \cdot f_2 \cdot R} = \frac{1}{2\pi \cdot 3000 \cdot 20 \cdot 10^3} = 2.65nF$$

$$\dot{H}(j\omega) = -\frac{R_f}{R_i} \cdot \frac{1}{1+\frac{j\omega}{\omega_2}} \cdot \frac{j\omega/\omega_1}{1+\frac{j\omega}{\omega_1}} = -\frac{R_f}{R_i} \cdot \frac{j\omega\omega_2}{(\omega_1 + j\omega)(\omega_2 + j\omega)}$$

Alla frequenza centrale $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2}$ si ha:

$$G = \left|H(\omega_0)\right| = \left|\frac{R_f}{R_i}\frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \Rightarrow \frac{R_f}{R_i} = G\frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_2} = G\frac{f_1 + f_2}{f_2} = 10\frac{3250}{3000} = 10.83\right.$$

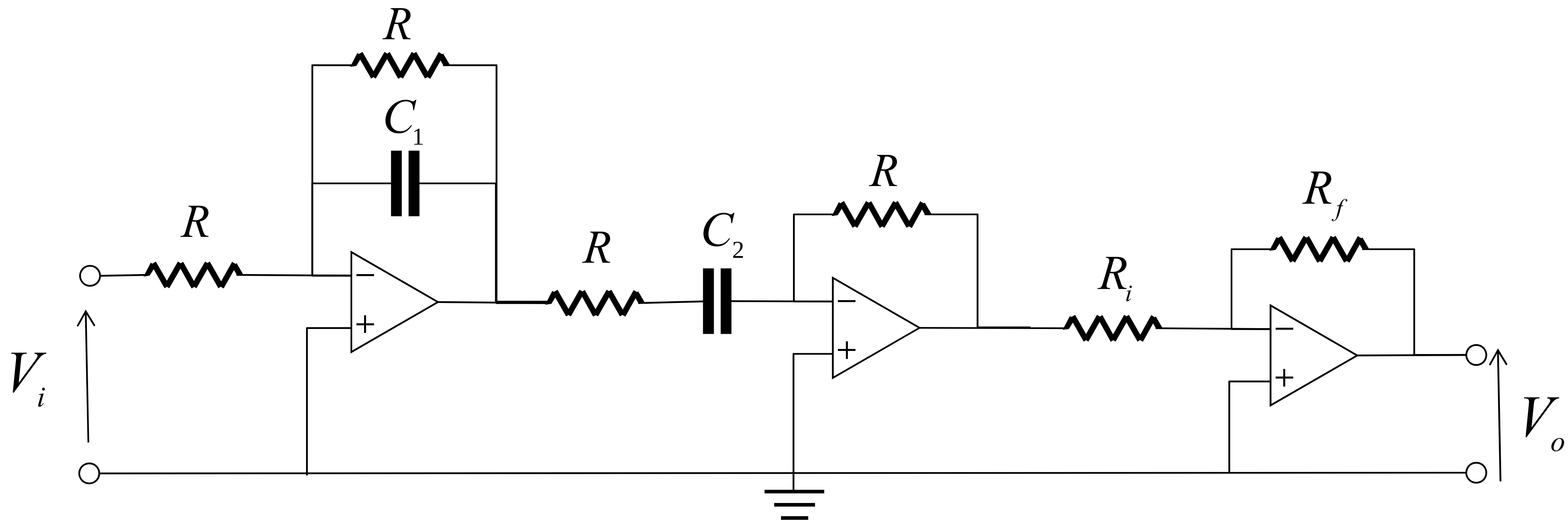
$\Rightarrow$ scegliendo $R_i = 10k\Omega \qquad \Rightarrow R_f = 10.83 R_i \cong 108k\Omega$

Esercizio

Progettare un filtro attivo passa-banda che lasci passare le frequenze comprese tra 250Hz e 3kHz e con guadagno paro a 10. Utilizzare R=20kΩ.

$$\omega_1 = \frac{1}{RC_2} \Rightarrow C_2 = \frac{1}{2\pi \cdot f_1 \cdot R} = \frac{1}{2\pi \cdot 250 \cdot 20 \cdot 10^3} = 31.83nF$$

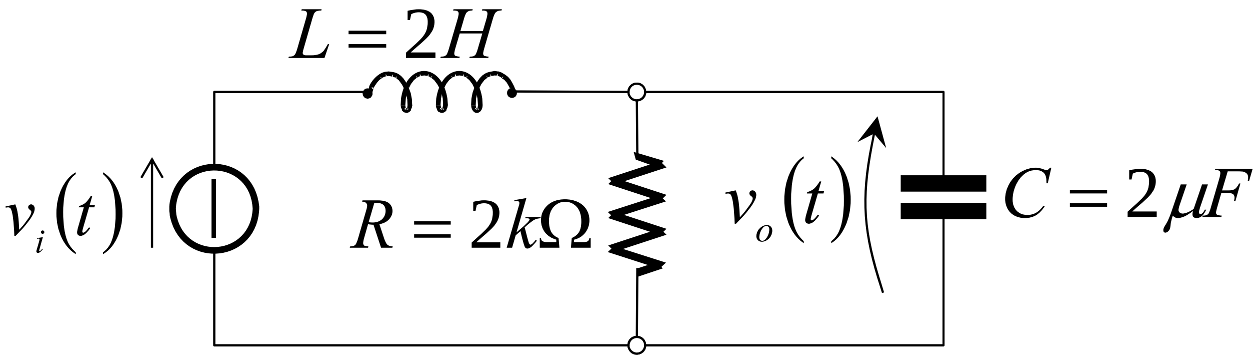
$$C_1 = \frac{1}{2\pi \cdot f_2 \cdot R} = \frac{1}{2\pi \cdot 3000 \cdot 20 \cdot 10^3} = 2.65nF$$



$\Rightarrow$ scegliendo $R_i = 10k\Omega \quad \Rightarrow R_f = 10.83 R_i \cong 108k\Omega$

Esercizio

Stabilire che tipo di filtro è il circuito in figura.



Calcoliamo la funzione di trasferimento:

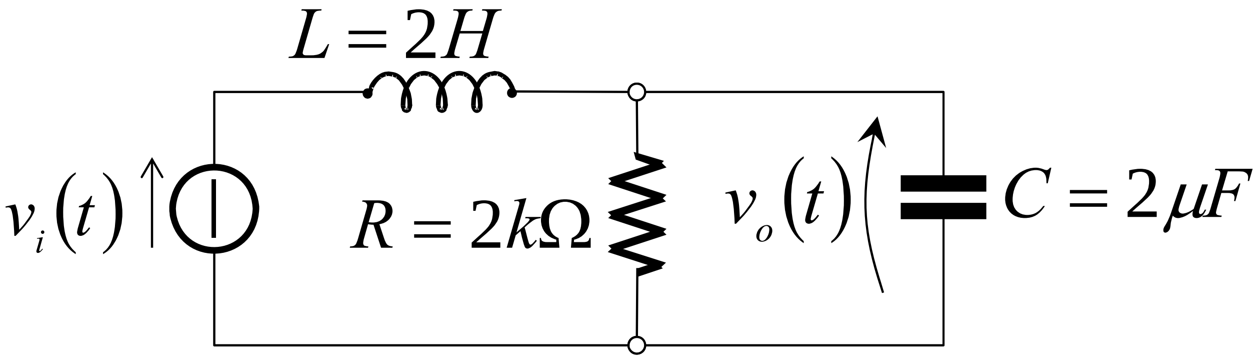
$$\dot{H}(j\omega) = \frac{\overline{V}_0}{\overline{V}_i} = \frac{R // \dfrac{1}{j\omega C}}{j\omega L + R // \dfrac{1}{j\omega C}} = \frac{\dfrac{R}{1 + j\omega RC}}{j\omega L + R \dfrac{R}{1 + j\omega RC}} = \frac{R}{-\omega^2 RLC + R + j\omega L}$$

$$\left|\dot{H}(j\omega)\right| = \frac{R}{\sqrt{\left(R - \omega^2 RLC\right)^2 + (\omega L)^2}} \Rightarrow \begin{cases} \omega = 0 & |H(0)| = 1 \\ \omega \to \infty & |H(\infty)| = 0 \end{cases}$$

Si tratta di un filtro passa-basso del 2° ordine. Calcoliamo la frequenza di taglio: sarà quella in corrispondenza della quale il modulo di H assume un valore pari a 1/√2 quello massimo.

Esercizio

Stabilire che tipo di filtro è il circuito in figura.



$$\left|\dot{H}(j\omega)\right| = \frac{R}{\sqrt{\left(R-\omega^2 RLC\right)^2 + (\omega L)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{R^2}{\left(R-\omega^2 RLC\right)^2 + (\omega L)^2} = \frac{1}{2}$$

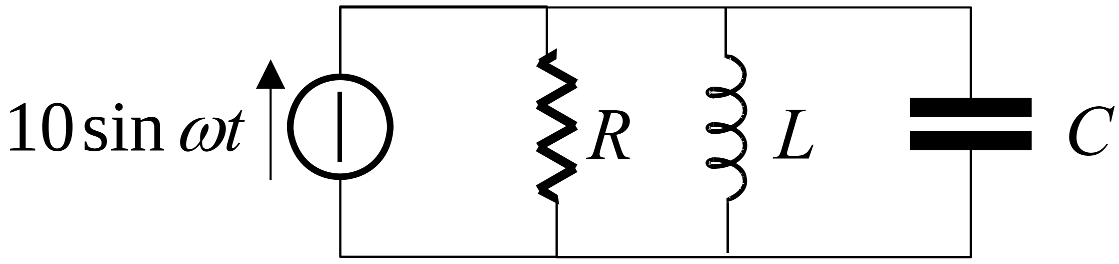
$$\Rightarrow 2 = \left(1+\omega^2 LC\right)^2 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2$$

Sostituendo i valori di R, L, C si avrà:

$$2 = \left(1+\omega^2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10^{-6}\right)^2 + \omega^2\left(\frac{2}{2\cdot 10^3}\right)^2 \Rightarrow 16\omega^4 - 7\omega^2 - 1 = 0$$

$$\omega_{12} = \frac{7 \mp \sqrt{49+64}}{2} = \begin{cases} -1.82 & \underline{\text{si scarta}} \\ 882 & \text{rad/s} \end{cases} \qquad \omega_c = 882 \ \text{rad/s}$$

Esercizio



R=8kΩ; L=0.2mH; C=8μF

Determinare ω_0, Q, B.

Determinare le pulsazioni di taglio ω_1 e ω_2.

Determinare la potenza dissipata in ω_0, ω_1 e ω_2.

Si tratta di un circuito RLC parallelo. $$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0.2 \cdot 10^{-3} \cdot 8 \cdot 10^{-6}}} = 25 \cdot 10^3 \ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$Q = \frac{R}{\omega_0 L} = \frac{8 \cdot 10^3}{25 \cdot 10^3 \cdot 0.2 \cdot 10^{-3}} = 1600 \qquad B = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{25 \cdot 10^3}{1600} = 15.625 \ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

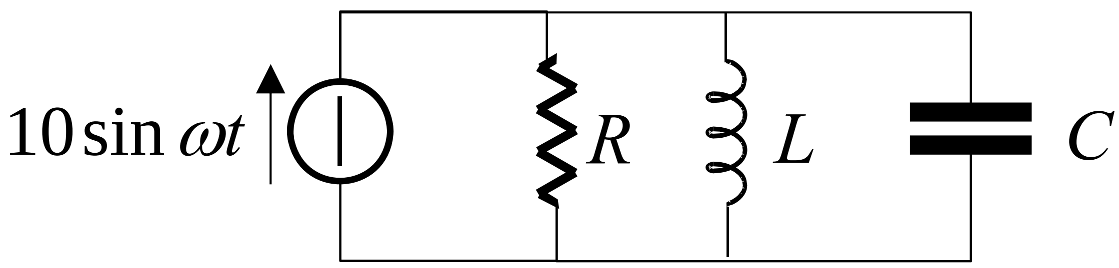
Poiché il fattore di qualità del circuito è molto alto possiamo considerare le due pulsazioni di taglio simmetriche rispetto alla pulsazione di risonanza.

$$\omega_1 = \omega_0 - \frac{B}{2} = 25 \cdot 10^3 - \frac{15.625}{2} = 24992 \ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega_2 = \omega_0 + \frac{B}{2} = 25 \cdot 10^3 + \frac{15.625}{2} = 25008 \ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

per $\omega = \omega_0 \qquad \dot{Y} = \frac{1}{R}; \quad \dot{Z} = R = 8k\Omega$

Esercizio



R=8kΩ; L=0.2mH; C=8μF

Determinare ω_0, Q, B.

Determinare le pulsazioni di taglio ω_1 e ω_2.

Determinare la potenza dissipata in ω_0, ω_1 e ω_2.

La corrente che attraversa il resistore sarà:

$$\bar{I}_R = \frac{\bar{V}}{R} = \frac{10\angle -90°}{8\cdot 10^3} = 1.25\cdot 10^{-3}\angle -90°\ \mathrm{A}$$

La potenza dissipata nel circuito alla risonanza è:

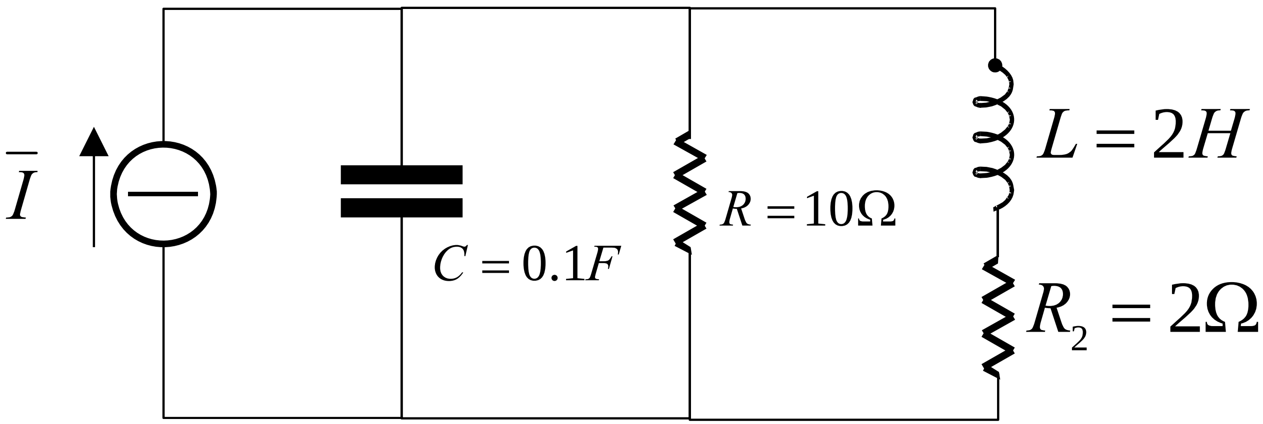
$$P = \frac{V_M^2}{2R} = \frac{100}{2\cdot 8\cdot 10^3} = 6.25mW$$

Per $\omega = \omega_1 = \omega_2$ verrà dissipata metà potenza:

$$P_{\omega_1,\omega_2} = 3.125mW$$

Esercizio

Determinare le pulsazione di risonanza del circuito in figura.



Si tratta di un circuito RLC.

Calcoliamo l'ammettenza in ingresso:

$$\dot{Y} = j\omega C + \frac{1}{R} + \frac{1}{R_2 + j\omega L} = j\omega 0.1 + 0.1 + \frac{1}{2 + j\omega 2} = \left(0.1 + \frac{2}{4 + 4\omega^2}\right) + j\left(0.1\omega - \frac{2\omega}{4 + 4\omega^2}\right)$$

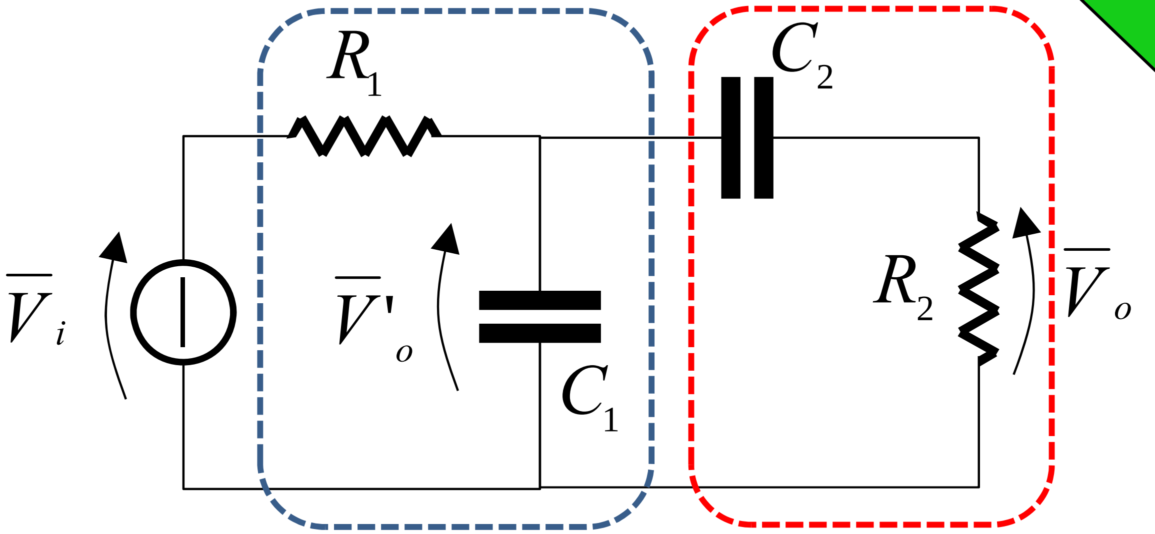
La parte immaginaria di Y si annulla se $0.1\omega_0 - \dfrac{2\omega_0}{4 + 4\omega_0^{\ 2}} = 0$

$$0.4\omega_0 + 0.4\omega_0^3 - 2\omega_0 = 0 \Rightarrow 0.4\omega_0^3 - 1.6\omega_0 = 0 \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{1.6}{0.4} = 4$$

$$\omega_0 = 2\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Esercizio

Calcolare la funzione di trasferimento del filtro in figura. Determinare la natura del filtro.



Possiamo determinare la funzione di trasferimento moltiplicando la funzione di trasferimento dei due filtri in cascata.

$$\overline{V}'_0 = \overline{V}_i \cdot \frac{\frac{1}{j\omega C_1}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} = \overline{V}_i \cdot \frac{1}{1 + j\omega R_1 C_1}$$

Si tratta di un filtro passa-basso

con pulsazione di taglio $\omega_C = \frac{1}{R_1 C_1}$

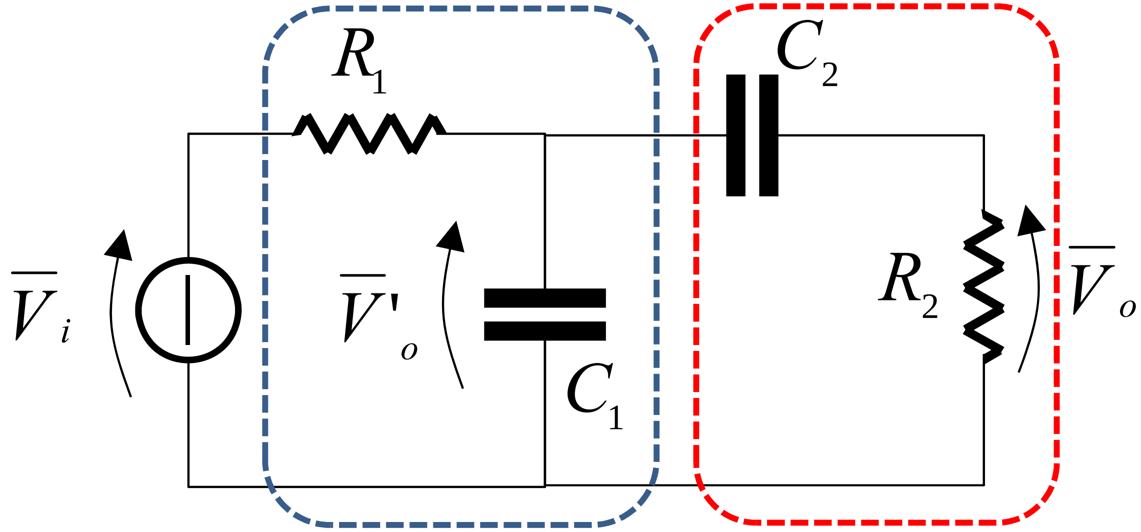
$$\overline{V}_0 = \overline{V}'_0 \cdot \frac{R_2}{R2 + \frac{1}{j\omega C_2}} = \overline{V}'_0 \cdot \frac{j\omega R_2 C_2}{1 + j\omega R_2 C_2}$$

Si tratta di un filtro passa-alto

con pulsazione di taglio $\omega_C = \frac{1}{R_2 C_2}$

Esercizio

Calcolare la funzione di trasferimento del filtro in figura.
Determinare la natura del filtro.



La funzioni di trasferimento finale è quindi $\overline{V}_0 = \overline{V}_i \cdot \dfrac{1}{1 + j\omega R_1 C_1} \cdot \dfrac{j\omega R_2 C_2}{1 + j\omega R_2 C_2}$

Si ottiene quindi un filtro passa-banda passivo con pulsazioni di taglio

Larghezza di banda → $B = \omega_2 - \omega_1$

$$\omega_2 = \frac{1}{R_1 C_1} \qquad \omega_1 = \frac{1}{R_2 C_2}$$

Pulsazione di centro banda → $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$

$$\left|\dot{H}(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega R_1 C_1)^2}} \cdot \frac{\omega R_2 C_2}{\sqrt{1 + (\omega R_2 C_2)^2}}$$

per $\omega = 0$ $\quad \left|\dot{H}(0)\right| = 0$

per $\omega \to \infty$ $\quad \left|\dot{H}(\infty)\right| = 0$

per $\omega = \omega_0$ $\quad \left|\dot{H}(\omega_0)\right| = \dfrac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2}$ il guadagno è inferiore a 1