

**Appunti del Corso di Elettrotecnica**  
**Facoltà di Ingegneria – Università di Cagliari**  
**Prof. Alessandra Fanni**

**Analisi dei sistemi trifase**

Viene detto sistema polifase un sistema costituito da più tensioni o da più correnti sinusoidali, sfasate l'una rispetto all'altra. Un sistema polifase è simmetrico quando le grandezze sinusoidali hanno la stessa ampiezza (stesso valore efficace) e sono sfasate l'una rispetto all'altra di  $\pm 2\pi/m$ , con  $m$  numero di fasi. Ciascuna grandezza sinusoidale nel tempo è caratteristica di una fase. Se il sistema polifase è simmetrico, si potrà esprimere come:

$$\begin{cases} a_1(t) = \sqrt{2}A \cos(\omega t + \alpha) \\ a_2(t) = \sqrt{2}A \cos(\omega t + \alpha \pm \frac{2\pi}{m}) \\ a_m(t) = \sqrt{2}A \cos(\omega t + \alpha \pm (m-1) \frac{2\pi}{m}) \end{cases} \quad (1)$$

con  $m$  intero qualunque maggiore di 2.

Al sistema (1) corrisponde un sistema polifase costituito da fasori della stessa ampiezza (pari al valore efficace della grandezza che il fasore rappresenta), sfasati l'uno rispetto all'altro di  $\pm 2\pi/m$ .

Dal sistema scritto discende che in un sistema polifase deve essere nulla la somma dei valori istantanei. Il sistema degli  $m$  fasori è rappresentabile quindi con una stella regolare ad  $m$  raggi o con un poligono regolare ad  $m$  lati (Fig. 1).

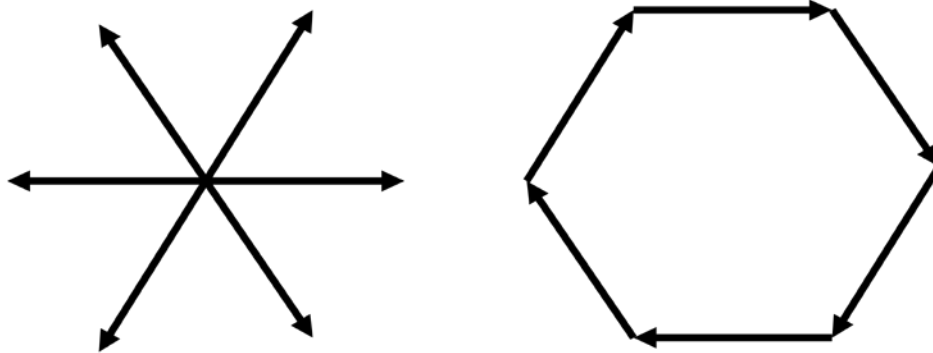


Fig. 1 Diagramma fasoriale di un sistema polifase con  $m=6$

Riveste notevole interesse lo studio dei sistemi trifase, in cui  $m=3$ . Infatti, il trasporto e la distribuzione dell'energia elettrica dai luoghi di produzione (centrali) ai luoghi di utilizzazione avviene in massima parte attraverso linee a tre fasi. Inoltre, con tali sistemi è possibile generare campi magnetici rotanti alla base del funzionamento delle macchine elettriche ad induzione. Allo stesso tempo questi sistemi hanno la caratteristica che, sotto determinate condizioni, la potenza elettrica che viaggia sulla linea è costante, come verrà dimostrato più avanti.

Un possibile sistema trifase è il seguente:

$$\begin{cases} a_1(t) = \sqrt{2}A \cos \omega t \\ a_2(t) = \sqrt{2}A \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \\ a_3(t) = \sqrt{2}A \cos(\omega t - \frac{4\pi}{3}) \end{cases}$$

Tale sistema può essere rappresentato da 3 fasori angularmente sfasati di 120° l'uno rispetto all'altro. In tale caso il sistema è *Diretto*, cioè l'ordine ciclico in cui si susseguono le fasi è il diretto o l'orario (Fig. 2).

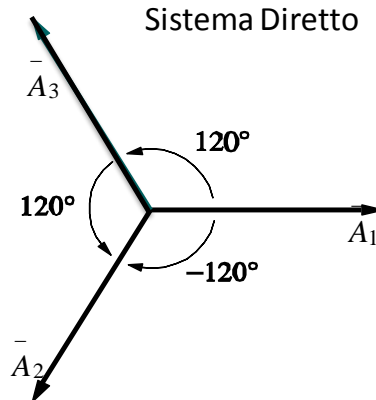


Fig. 2 Rappresentazione fasoriale di un sistema trifase diretto

Viene chiamato *Inverso* il sistema trifase in cui l'ordine ciclico è antiorario. Tale sistema può essere ottenuto dal precedente scambiando tra loro due fasi (Fig. 3):

$$\begin{cases} a'_1 = \sqrt{2}A \cos \omega t \\ a'_2 = \sqrt{2}A \cos(\omega t + \frac{2\pi}{3}) \\ a'_3 = \sqrt{2}A \cos(\omega t + \frac{4\pi}{3}) \end{cases}$$

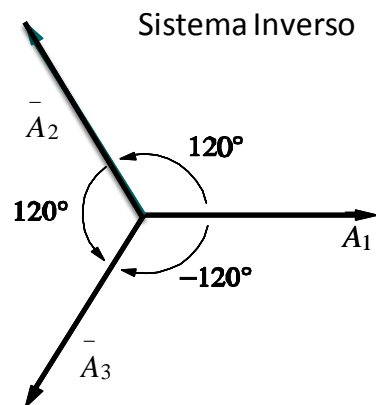


Fig. 3 Rappresentazione fasoriale di un sistema trifase inverso

La sequenza diretta è anche detta dei *ritardi* in quanto, assumendo come riferimento il primo fasore della terna, il secondo è sfasato di 120° in ritardo e il terzo di 240° sempre in ritardo; viceversa, la sequenza inversa è detta anche degli *anticipi*.

## Principio di funzionamento del generatore trifase

Supponiamo di avere una spira piana di superficie  $S$  e forma qualunque (rettangolare in Fig. 4), montata su di un asse sul quale vengono calettati due anelli, collegati agli estremi della spira ed isolati fra loro. Due contatti striscianti  $s$  ed  $s'$  (detti spazzole) permettono di collegare gli estremi della spira rotante ad un circuito fisso. Disponiamo tale spira in un campo magnetico di induzione  $\vec{B}$  costante, creato ad esempio da due espansioni polari, ed orientiamo la spira in modo che l'asse della spira sia normale al campo magnetico. Mettiamo in rotazione la spira con velocità angolare  $\omega$  costante.

Detto  $\alpha$  l'angolo che la normale alla spira forma con la direzione di  $\vec{B}$  all'istante zero (Fig. 5), il flusso di induzione concatenato con la spira all'istante  $t$  generico sarà:

$$\varphi(t) = BS\cos(\omega t + \alpha)$$

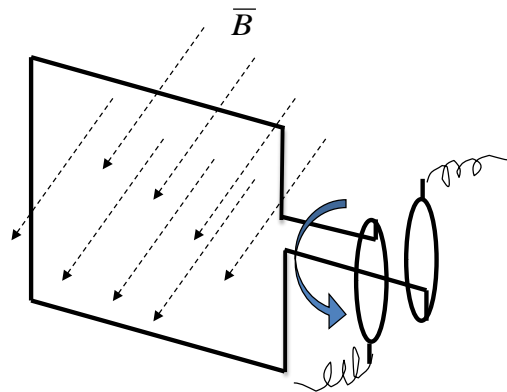


Fig. 4 Spira piana immersa in un campo magnetico

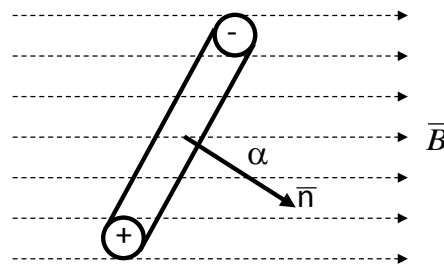


Fig. 5 Posizione della spira piana all'istante zero

La forza elettromotrice di induzione (f.e.m.) sarà:

$$e'(t) = -\frac{d\varphi}{dt} = \omega BS\sin(\omega t + \alpha)$$

Se il circuito è formato da  $N$  spire complanari, addensate in modo che si possa considerare uguale il flusso concatenato con ciascuna spira, la f.e.m. indotta sarà  $N$  volte maggiore:

$$e = Ne' = N\omega BS\sin(\omega t + \alpha)$$

Se si immagina un complesso di 3 circuiti identici a quello visto, angularmente spostati di  $120^\circ$ , e ruotanti alla medesima velocità angolare  $\omega$ , si potranno raccogliere alle 3 coppie di spazzole, 3 f.e.m. che, se assumiamo all'istante zero la configurazione di Fig.6, saranno date da:

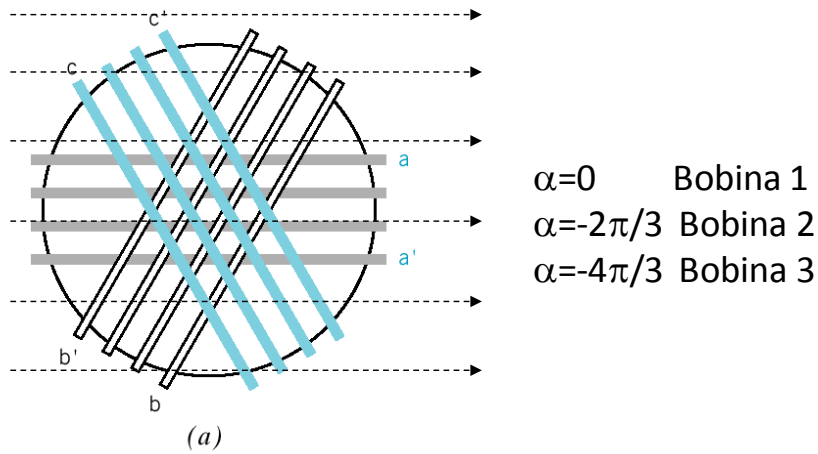


Fig. 6 – Generatore trifase di tensione

$$\begin{cases} e_1(t) = \omega NBS \cos \omega t = E_M \cos \omega t \\ e_2(t) = E_M \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \\ e_3(t) = E_M \cos(\omega t - \frac{4\pi}{3}) \end{cases} \quad \text{Sistema trifase simmetrico diretto (Fig. 7)}$$

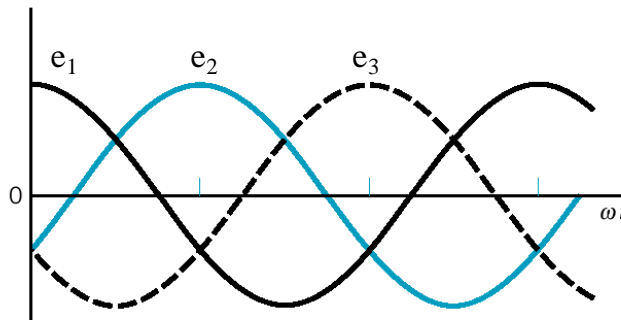


Fig. 7 – Sistema trifase simmetrico diretto di tensioni

Le tre bobine rappresentano schematicamente un generatore trifase di tensione. Tale sistema può essere rappresentato in forma compatta nel dominio dei fasori come:

$$\begin{cases} \bar{E}_1 = E e^{j0^\circ} \\ \bar{E}_2 = E e^{-j\frac{2\pi}{3}} = E e^{j\frac{4\pi}{3}} \\ \bar{E}_3 = E e^{-j\frac{4\pi}{3}} = E e^{j\frac{2\pi}{3}} \end{cases}$$

tali che:  $\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3 = 0$

Ciascuna bobina può essere rappresentata come un generatore ideale di tensione (Fig. 8) (la rappresentazione di un generatore reale sarà costituita da un generatore ideale in serie ad un'impedenza).

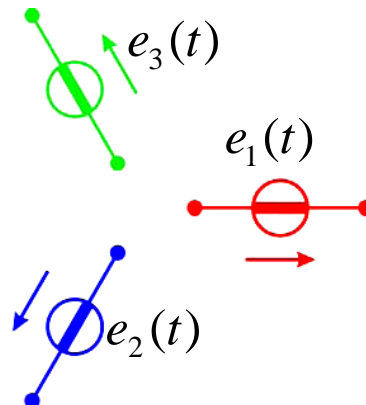


Fig. 8 – Modello circuitale delle tre bobine

Le tre bobine possono essere collegate fra di loro a stella o a triangolo (Fig. 9).

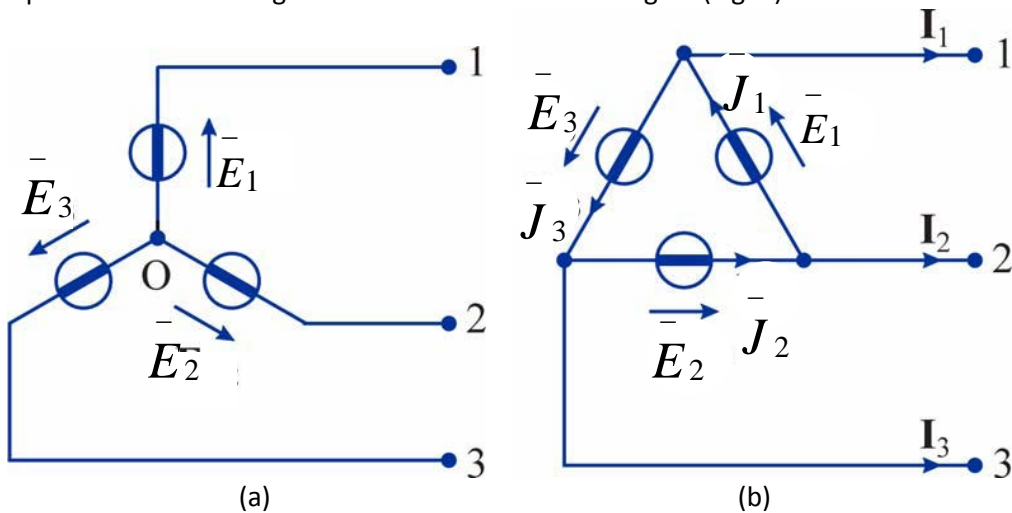


Fig. 9 – a) Generatore a Stella; b) Generatore a Triangolo

Nel collegamento a stella si hanno 4 morsetti accessibili. Il morsetto comune 0 viene detto *centro stella*. Tra il centro stella comune e i morsetti 1, 2, e 3, si rilevano le 3 tensioni  $\bar{E}_1$ ,  $\bar{E}_2$ , ed  $\bar{E}_3$ , che vengono chiamate *Tensioni Stellate*. Dai morsetti 1,2,e 3, possono partire tre conduttori, che consentono di collegare il generatore ai carichi. Questi tre conduttori sono detti fili di linea, e le correnti che li attraversano, correnti di linea. Dal centro stella puo' partire un quarto filo, detto filo neutro.

Inoltre è possibile rilevare un ulteriore sistema trifase di tensioni tra i morsetti 1,2, 3, dette *Tensioni Concatenate*:  $\bar{U}_{12}, \bar{U}_{23}, \bar{U}_{31}$ . La terna delle tensioni concatenate ha la stessa sequenza delle tensioni stellate. Le tensioni concatenate hanno valore efficace pari a  $\sqrt{3}$  volte il valore efficace delle grandezze stellate:  $U = \sqrt{3}E$ . Infatti la generica tensione concatenata  $U_{ij}=E_i-E_j$  è sfasata di  $30^\circ$  in anticipo rispetto ad  $E_i$  e di  $150^\circ$  in anticipo rispetto ad  $E_j$ . Il triangolo formato da  $E_i$ ,  $E_j$  e  $U_{ij}$  è un triangolo isoscele in cui i due angoli uguali sono pari a  $30^\circ$  (Fig. 10). Sarà quindi:

$$U = 2E \cos 30^\circ = 2E \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}E$$

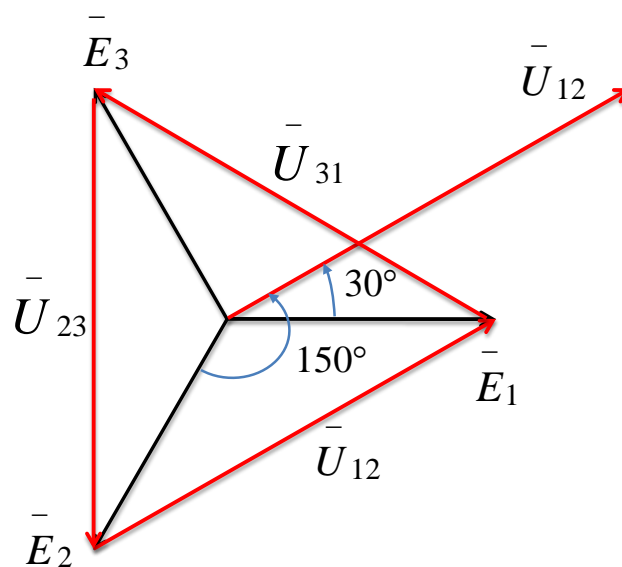


Fig. 10 – Tensioni stellate (nero) e concatenate (rosso)

$$\begin{cases} \bar{U}_{12} = \sqrt{3}\bar{E}_1 e^{j\frac{\pi}{6}} \\ \bar{U}_{23} = \sqrt{3}\bar{E}_2 e^{j\frac{\pi}{6}} \\ \bar{U}_{31} = \sqrt{3}\bar{E}_3 e^{j\frac{\pi}{6}} \end{cases}$$

Sarà sempre  $\bar{U}_{12} + \bar{U}_{23} + \bar{U}_{31} = 0$  anche se la terna delle tensioni stellate non fosse simmetrica. La terna delle tensioni concatenate è quindi una terna *PURA*. Una terna si dice spuria se la somma delle tre componenti è diversa da zero, si dice invece pura se, in qualunque istante di tempo, la somma delle tre componenti è nulla (i tre fasori formano una figura chiusa ossia un triangolo).

Nel collegamento a triangolo si hanno solo 3 morsetti accessibili fra cui si rilevano le tensioni, coincidenti con le tensioni concatenate. In tale caso è possibile però individuare 2 possibili sistemi trifase di correnti: le correnti di linea ( $I_1, I_2$  ed  $I_3$  in Fig. 9) e le correnti di fase ( $J_1, J_2$ , e  $J_3$  nella stessa Fig. 9b).

Sarà (vedi Fig. 9b):

$$\bar{I}_1 = \bar{J}_1 - \bar{J}_3$$

$$\bar{I}_2 = \bar{J}_2 - \bar{J}_1$$

$$\bar{I}_3 = \bar{J}_3 - \bar{J}_2$$

$\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0$ . La terna delle correnti di linea in un sistema trifase senza filo neutro è una terna pura.

### **Terne di sequenza**

Per rappresentare sistemi trifase simmetrici di tensioni (o di correnti, in tal caso vengono detti *equilibrati*) si può introdurre un operatore di rotazione  $\alpha = e^{j\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + j\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$  (numero complesso adimensionale).

Sarà:

$$\alpha^2 = e^{j\frac{4\pi}{3}} = \cos\frac{4\pi}{3} + j\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha^3 = e^{j2\pi} = e^{j0} = 1$$

$$\alpha^4 = \alpha$$

$$\alpha^5 = \alpha^2$$

....

Inoltre

$$\frac{1}{\alpha} = \alpha^3 = \alpha^2 \dots \text{etc.}$$

Sarà, facendo riferimento alle tensioni (analogamente per le correnti):

$$\begin{bmatrix} \bar{E}_1 \\ \bar{E}_2 \\ \bar{E}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} \bar{E} \quad \text{Terna diretta}$$

Allora dire che  $\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3 = 0$  significa anche che  $1 + \alpha + \alpha^2 = 0$ . In Fig. 11 è riportata la terna di operatori di rotazione nel piano complesso.

Per i sistemi polifase si può analogamente definire un operatore di rotazione  $\alpha = e^{j\frac{2\pi}{m}}$ .

Si individua una terna inversa nel seguente modo:

$$\begin{bmatrix} \bar{E}_1 \\ \bar{E}_2 \\ \bar{E}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{bmatrix} \bar{E} \quad \text{Terna Inversa}$$

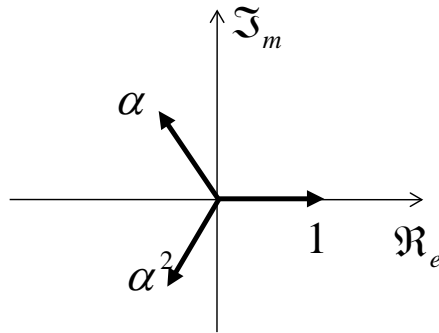


Fig. 11 – Terna di operatori di rotazione nel piano complesso

Per analogia si può definire una terna *Omopolare* (Fig. 12):

$$\begin{bmatrix} \bar{E}_1 \\ \bar{E}_2 \\ \bar{E}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \bar{E} \quad \text{Terna omopolare}$$

Una terna omopolare non è una terna simmetrica, ma viene introdotta per comodità, come si vedrà più avanti, per semplificare lo studio dei sistemi trifase affetti da guasti.

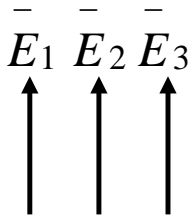


Fig. 12 – Terna omopolare

### Sistemi trifase

Un carico trifase può essere rappresentato mediante terne di bipoli collegati a stella o a triangolo (Fig. 13)

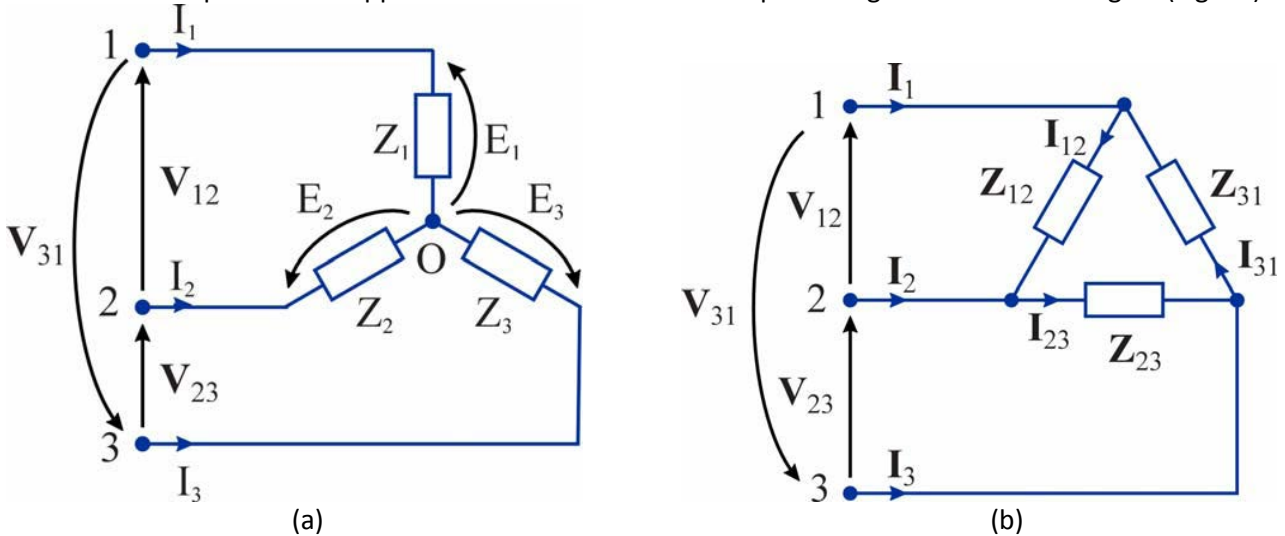


Fig. 13 – Carichi collegati a stella (a), ed a triangolo (b).

Nel carico a stella le tensioni di fase ai morsetti di ciascun bipolo coincidono con le tensioni stellate, mentre le correnti di fase coincidono con le correnti di linea. Nel carico a triangolo, le tensioni di fase coincidono con le tensioni concatenate, mentre le correnti di fase non coincidono con le correnti di linea

A seconda di come sono collegati il generatore e il carico, si possono realizzare differenti tipologie di sistemi trifase.

- Il collegamento Stella-Stella (Y-Y) si realizza quando il generatore è collegato a stella e il carico è collegato a stella. Possiamo avere il caso di sistema a quattro fili, se è presente il filo neutro che collega il centro stella del generatore con il centro stella del carico (Fig. 14), oppure il sistema a tre fili, se il neutro non è presente.

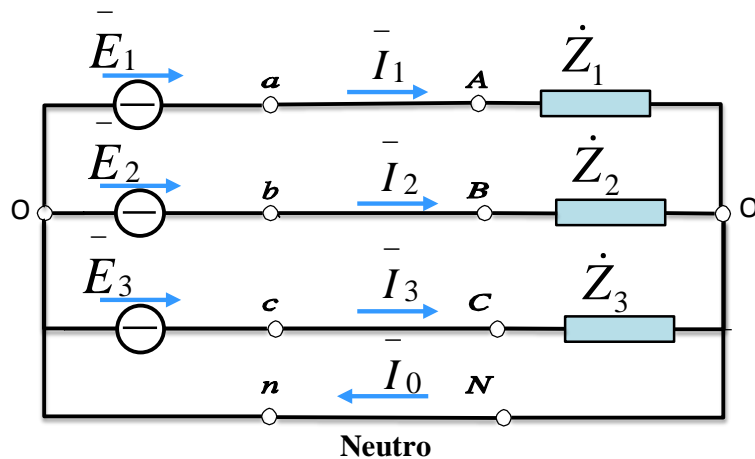


Fig. 14 – Sistema trifase Y-Y a 4 fili.

I sistemi con neutro sono ampiamente utilizzati nella distribuzione di energia a bassa tensione. In Italia il valore normalizzato delle tensioni di fase per la distribuzione a bassa tensione è di 230 V efficaci, corrispondenti a tensioni concatenate di 400 V efficaci (fino al 2003 i valori erano 220 V e 380 V). Le tensioni di fase sono utilizzate per alimentare carichi monofasi indipendenti (es. utenze domestiche). Le tensioni concatenate sono utilizzate per carichi trifase o per carichi monofase che richiedono potenze più elevate.

Si possono realizzare altri tre tipi di collegamento:

- Collegamento Stella-Triangolo (Y-Δ): il generatore è a stella ed il carico è collegato a triangolo. Si noti che, per l'equivalenza di un triangolo di impedenze ad una stella di impedenze, è sempre possibile riportarci al precedente caso di collegamento Y-Y;
- Collegamento Triangolo-Triangolo (Δ-Δ): il generatore è collegato a triangolo e il carico a triangolo (Fig. 15);
- Collegamento Triangolo-Stella (Δ-Y): il generatore è collegato a triangolo e il carico a stella. Anche in questo caso, dall'equivalenza stella-triangolo è possibile riportare il sistema alla configurazione precedente (Δ-Δ).

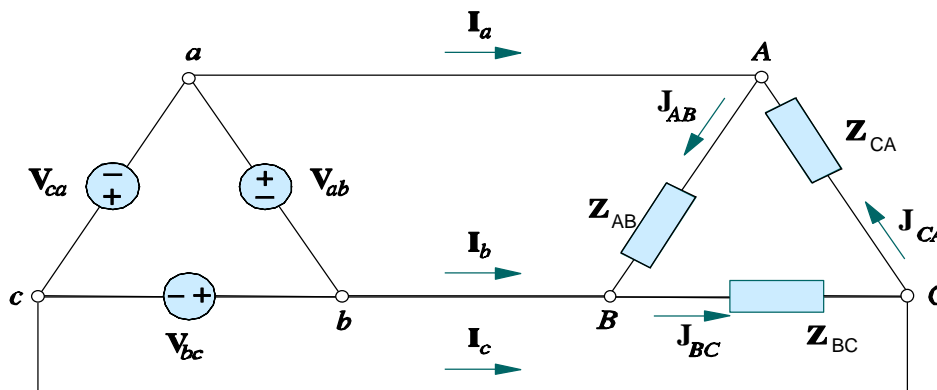


Fig. 15 – Sistema trifase Δ-Δ.



### Sistemi trifase Simmetrici ed Equilibrati con carichi monofase collegati a stella o a triangolo

Un carico trifase a stella o a triangolo si dice equilibrato se le impedenze delle tre fasi sono uguali fra loro.

Nel caso di generatore a stella e carico a stella (vedi Fig. 14), sia:

$$\dot{Z}_1 = \dot{Z}_2 = \dot{Z}_3 = \dot{Z} = Z \angle \varphi$$

le correnti di fase, coincidenti con le correnti di linea, valgono:

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}} = \frac{E \angle 0}{Z \angle \varphi} = I \angle -\varphi$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{E}_2}{\dot{Z}} = \frac{E \angle -(2/3)\pi}{Z \angle \varphi} = I \angle -(2/3)\pi - \varphi$$

$$\bar{I}_3 = \frac{\bar{E}_3}{\dot{Z}} = \frac{E \angle -(4/3)\pi}{Z \angle \varphi} = I \angle -(4/3)\pi - \varphi$$

$$I = \frac{E}{Z}$$

$$\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3 = 0 \Rightarrow \bar{I}_0 = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0$$

La corrente nel filo neutro è nulla, e le tre correnti di fase costituiscono un sistema trifase simmetrico, della stessa sequenza delle tensioni. Il sistema che ne consegue prende il nome di *Sistema trifase Simmetrico ed Equilibrato*. L'aggettivo simmetrico si riferisce alle tensioni, mentre equilibrato si riferisce alle correnti.

Il diagramma fasoriale delle tensioni e delle correnti di fase è riportato in Fig. 16. L'angolo di sfasamento tra la terna delle tensioni stellate e la terna delle correnti di linea è pari all'argomento  $\varphi$  dell'impedenza.

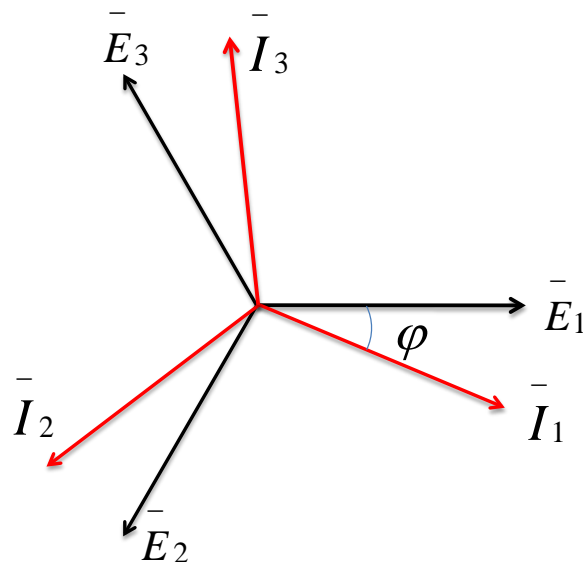


Fig. 16 – Diagramma fasoriale delle tensioni (nero) e delle correnti (rosso) di fase in un sistema trifase Y-Y simmetrico ed equilibrato

Nel caso di generatore a triangolo e carico a triangolo (vedi Fig. 15), sia:

$$\dot{Z}_{AB} = \dot{Z}_{BC} = \dot{Z}_{CA} = \dot{Z} = Z \angle \varphi$$

In questo caso, le tensioni di fase coincidono con le tensioni concatenate. Le correnti di fase valgono:

$$\bar{J}_{AB} = \frac{\bar{V}_{AB}}{\dot{Z}}; \bar{J}_{BC} = \frac{\bar{V}_{BC}}{\dot{Z}}; \bar{J}_{CA} = \frac{\bar{V}_{CA}}{\dot{Z}}$$

Le correnti di fase costituiscono una terna equilibrata della stessa sequenza delle tensioni di alimentazione. Le correnti di linea hanno valore efficace pari a  $\sqrt{3}$  volte il valore efficace delle correnti stellate: con  $I = \sqrt{3}J$  (valgono le stesse considerazioni fatte per le tensioni stellate e concatenate). Le  $\bar{I}_i$  sono sfasate di  $30^\circ$  in ritardo rispetto alle  $\bar{J}_{ij}$

In Fig. 17 è riportato il diagramma fasoriale delle tensioni concatenate e delle correnti di fase e di linea in un sistema trifase  $\Delta-\Delta$  simmetrico ed equilibrato. In questo caso si è preso il fasore  $\bar{V}_{AB}$  come fasore di riferimento.

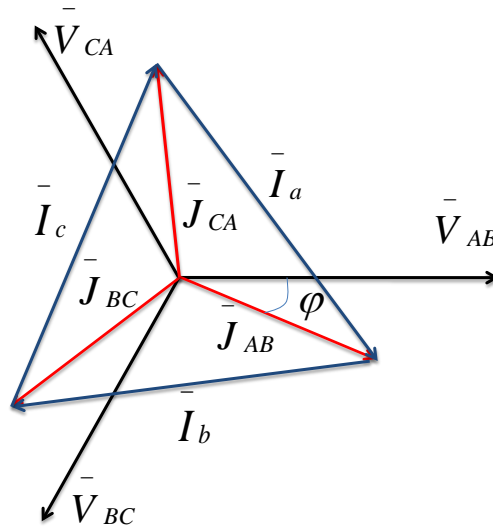


Fig. 17 – Diagramma fasoriale delle tensioni concatenate (nero) e delle correnti di fase (rosso) e di linea (blu) in un sistema trifase  $\Delta-\Delta$  simmetrico ed equilibrato.

### Circuito monofase equivalente

Come visto precedentemente, nei sistemi trifase simmetrici ed equilibrati ciascuna delle fasi può essere studiata separatamente dalle altre. Inoltre, le tensioni e le correnti sulle tre fasi sono identiche salvo una rotazione di fase di  $120^\circ$  l'una rispetto all'altra. Si può quindi fare riferimento ad un circuito monofase equivalente (per esempio alla prima fase) e, una volta risolto in circuito monofase equivalente, è possibile determinare le tensioni e le correnti delle altre due fasi introducendo gli opportuni sfasamenti di  $\pm 2\pi/3$  (a seconda che la terna alimentante sia inversa o diretta).

Riferiamoci all'esempio di Fig. 18, dove un carico equilibrato è alimentato da una terna simmetrica diretta di tensioni concatenate.

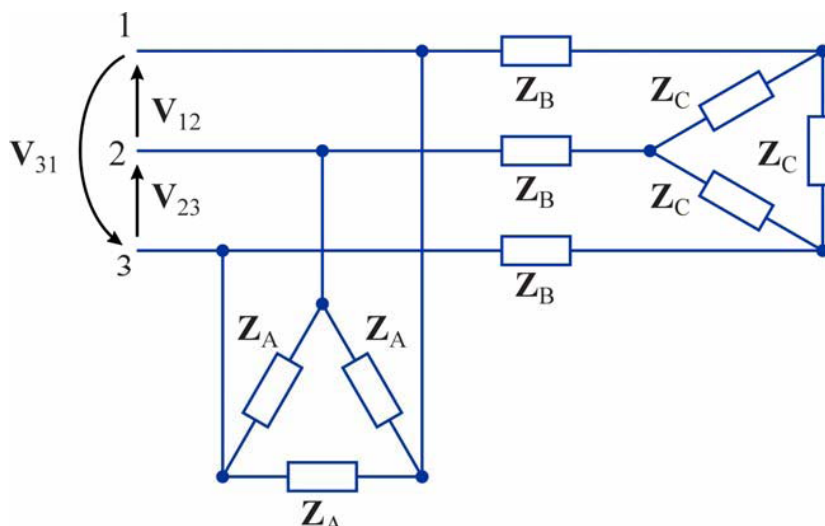


Fig. 18 – Circuito trifase simmetrico ed equilibrato

Possiamo sostituire i generatori a triangolo con generatori a stella, e i carichi a triangolo con carichi a stella. Il circuito diventa quello di Fig. 19.

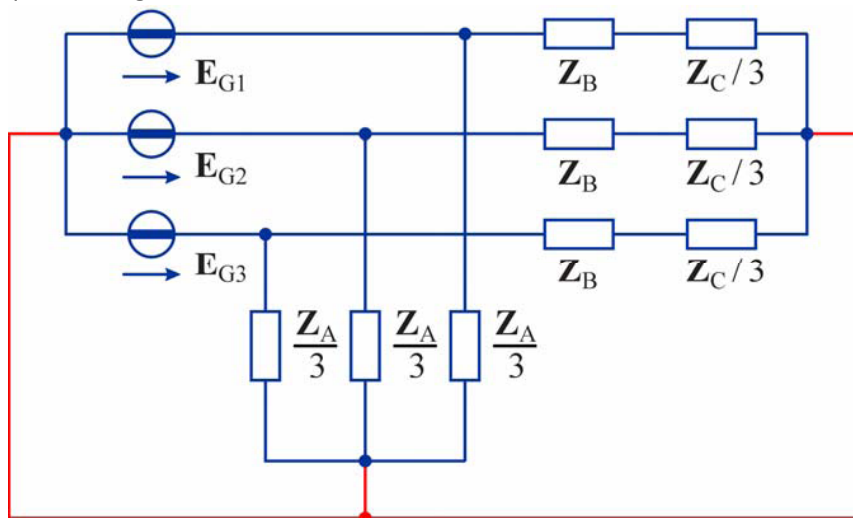


Fig. 19 – Circuito equivalente a quello di Fig. 18.

Poiché tutti i carichi sono equilibrati, i centri di tutte le stelle sono allo stesso potenziale e possono essere quindi collegati tra loro (collegamento rosso in Fig. 19).

Il corrispondente circuito monofase equivalente alla prima fase è riportato in Fig. 20.

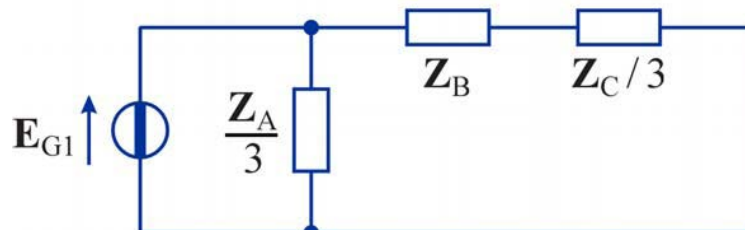


Fig. 20 – Circuito monofase equivalente al circuito in Fig. 17.

### Carichi trifase

Oltre ai carichi monofase, collegati sulle tre fasi di un sistema trifase, esistono anche i carichi trifase (ad esempio i motori trifase).

Nel caso di carichi trifase con neutro accessibile (Fig. 21), essi possono essere modellati come un m-porte con  $m=3$ . Un 3-porte (o triplo bipolo) è caratterizzato da una matrice di impedenza (se esso è definito su base corrente) o di ammettenza (se esso è definito su base tensione) o da entrambe le matrici del tipo:

$$\bar{\bar{Z}} = \begin{bmatrix} \dot{Z}_{11} & \dot{Z}_{12} & \dot{Z}_{13} \\ \dot{Z}_{21} & \dot{Z}_{22} & \dot{Z}_{23} \\ \dot{Z}_{31} & \dot{Z}_{32} & \dot{Z}_{33} \end{bmatrix}; \bar{\bar{Y}} = \begin{bmatrix} \dot{Y}_{11} & \dot{Y}_{12} & \dot{Y}_{13} \\ \dot{Y}_{21} & \dot{Y}_{22} & \dot{Y}_{23} \\ \dot{Y}_{31} & \dot{Y}_{32} & \dot{Y}_{33} \end{bmatrix}$$

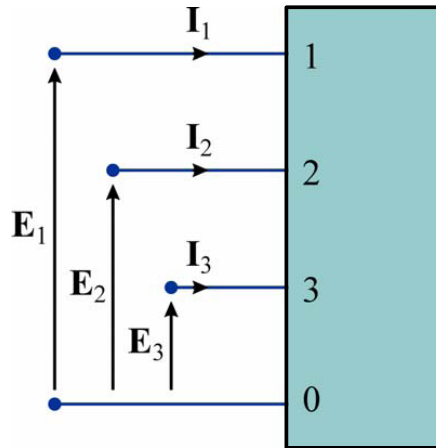


Fig. 21 – Carico trifase con neutro accessibile.

La relazione tra le tensioni stellate e le correnti di linea, in generale può essere espressa in termini di matrici di impedenza o di ammettenza:

$$\bar{\mathbf{E}} = \bar{\mathbf{Z}} \cdot \bar{\mathbf{I}}$$

$$\bar{\mathbf{I}} = \bar{\mathbf{Y}} \cdot \bar{\mathbf{E}}$$

Con:

$$\bar{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \bar{E}_1 \\ \bar{E}_2 \\ \bar{E}_3 \end{bmatrix}; \bar{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ \bar{I}_3 \end{bmatrix}$$

In generale gli elementi della matrice di impedenza (ammettenza) sono tutti diversi tra loro in quanto il principio di reciprocità non vale se ad esempio ci sono organi in movimento. Esistono inoltre elementi mutuamente accoppiati, per cui ciascuna tensione dipende dalle correnti in tutte le fasi, e viceversa.

Spesso però gli elementi della matrice di impedenza (ammettenza) soddisfano le seguenti condizioni:

$$\dot{Z}_{11} = \dot{Z}_{22} = \dot{Z}_{33} = \dot{Z}_p$$

$$\dot{Z}_{12} = \dot{Z}_{23} = \dot{Z}_{31} = \dot{Z}_m$$

$$\dot{Z}_{13} = \dot{Z}_{21} = \dot{Z}_{32} = \dot{Z}_n$$

In tal caso la matrice delle impedenze (ammettenze) assume una configurazione detta a simmetria ciclica o ciclo-simmetrica:

$$\bar{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \dot{Z}_p & \dot{Z}_m & \dot{Z}_n \\ \dot{Z}_n & \dot{Z}_p & \dot{Z}_m \\ \dot{Z}_m & \dot{Z}_n & \dot{Z}_p \end{bmatrix} \text{ Matrice ciclo-simmetrica}$$

Le matrici ciclo-simmetriche sono generalmente associate ai motori ad ai generatori ad induzione, non godono della reciprocità ma i suoi elementi si ripetono ciclicamente.

Se  $\dot{Z}_m \neq \dot{Z}_n$  non c'è reciprocità; è il caso tipico di macchine rotanti.

Se  $\dot{Z}_m = \dot{Z}_n$  si ha un normale sistema passivo e tutti i termini mutui sono uguali.

Nel caso in cui il neutro non sia accessibile (Fig. 22) è sempre possibile definire la matrice di ammettenza considerando i potenziali dei terminali rispetto ad un punto O scelto in modo arbitrario (cioè scegliendo arbitrariamente il centro delle tensioni stellate). Al variare di O non variano le correnti, perché non variano le tensioni concatenate.

$$\bar{\mathbf{I}} = \bar{\mathbf{Y}} \cdot \bar{\mathbf{E}}$$

In questo caso la matrice di ammettenza è sempre singolare, quindi non esiste la matrice di impedenza.

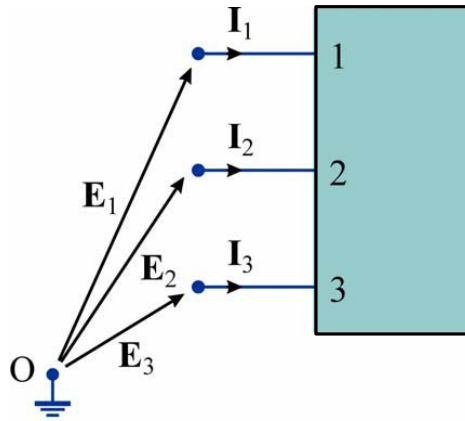


Fig. 22 – Carico trifase senza neutro accessibile.

Si dimostra che, quando le matrici di impedenza (ammettenza) dei carichi trifase sono almeno ciclo-simmetriche il sistema delle correnti è equilibrato (se l'alimentazione è simmetrica). Anche in questo caso il sistema può essere studiato facendo riferimento ad un unico circuito monofase equivalente. La dimostrazione verrà condotta facendo riferimento all'esempio di Fig. 23.

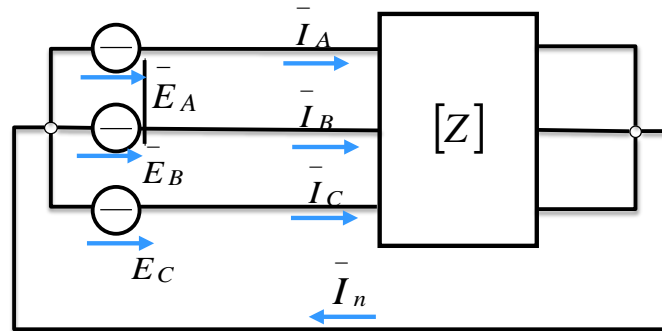


Fig. 23 – Sistema trifase con neutro.

Supponiamo che la matrice  $[Z]$  sia ciclo-simmetrica (anche l'inversa  $[Y]=[Z]^{-1}$ , se esiste, è ciclo-simmetrica) e supponiamo che il generatore fornisca una terna simmetrica diretta, allora sarà:

$$\bar{E} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} \bar{E}_A; \quad \bar{I} = \begin{bmatrix} \bar{I}_A \\ \bar{I}_B \\ \bar{I}_C \end{bmatrix}$$

e

$$\bar{I} = \begin{bmatrix} \dot{Y}_p & \dot{Y}_m & \dot{Y}_n \\ \dot{Y}_n & \dot{Y}_p & \dot{Y}_m \\ \dot{Y}_m & \dot{Y}_n & \dot{Y}_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} \bar{E}_A \Rightarrow \begin{cases} \bar{I}_A = (\dot{Y}_p + \alpha^2 \dot{Y}_m + \alpha \dot{Y}_n) \bar{E}_A \\ \alpha^2 \bar{I}_A = (\dot{Y}_n + \alpha^2 \dot{Y}_p + \alpha \dot{Y}_m) \bar{E}_A = \bar{I}_B \\ \alpha \bar{I}_A = (\dot{Y}_m + \alpha^2 \dot{Y}_n + \alpha \dot{Y}_p) \bar{E}_A = \bar{I}_C \end{cases}$$

da cui:

$$\bar{I} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} \bar{I}_A$$

La terna delle correnti è ancora una terna simmetrica diretta (equilibrata), ed il sistema è un sistema simmetrico (nelle tensioni) ed equilibrato (nelle correnti).

Si noti che  $\bar{I}_A + \alpha^2 \bar{I}_A + \alpha \bar{I}_A = 0$ , quindi la corrente nel neutro è nulla ed il neutro si può sopprimere.

Se il sistema è simmetrico ed equilibrato può essere scritto nel seguente modo:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} \bar{E}_A = \bar{Z} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} \bar{I}_A = \begin{bmatrix} \dot{Z}_p & \dot{Z}_m & \dot{Z}_n \\ \dot{Z}_n & \dot{Z}_p & \dot{Z}_m \\ \dot{Z}_m & \dot{Z}_n & \dot{Z}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} \bar{I}_A \Rightarrow \begin{cases} \bar{E}_A = (\dot{Z}_p + \alpha^2 \dot{Z}_m + \alpha \dot{Z}_n) \bar{I}_A \\ \alpha^2 \bar{E}_A = (\dot{Z}_n + \alpha^2 \dot{Z}_p + \alpha \dot{Z}_m) \bar{I}_A \\ \alpha \bar{E}_A = (\dot{Z}_m + \alpha^2 \dot{Z}_n + \alpha \dot{Z}_p) \bar{I}_A \end{cases}$$

moltiplicando la seconda equazione per  $\alpha$  e la terza per  $\alpha^2$ , e ricordandosi le operazioni tra gli operatori di rotazione, otteniamo le seguenti tre equazioni coincidenti:

$$\begin{cases} \bar{E}_A = (\dot{Z}_p + \alpha^2 \dot{Z}_m + \alpha \dot{Z}_n) \bar{I}_A \\ \bar{E}_A = (\alpha \dot{Z}_n + \dot{Z}_p + \alpha^2 \dot{Z}_m) \bar{I}_A \\ \bar{E}_A = (\alpha^2 \dot{Z}_m + \alpha \dot{Z}_n + \dot{Z}_p) \bar{I}_A \end{cases}$$

Ci si può quindi ridurre a studiare il circuito monofase equivalente di Fig. 24.

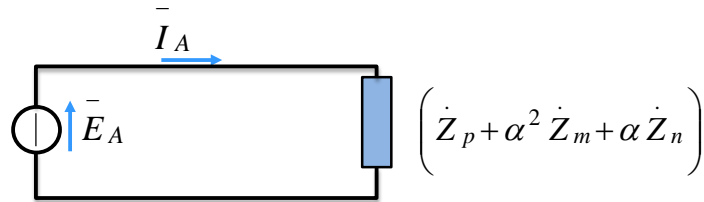


Fig. 24 – Circuito monofase equivalente del sistema trifase in Fig. 23.

Le altre componenti della terna di correnti si ottengono ruotando la prima componente di  $\alpha^2$  ed  $\alpha$  rispettivamente.

In Fig. 25 è riportato un ulteriore esempio di sistema trifase. Si suppone che la terna alimentante sia una terna simmetrica diretta e che i tre carichi trifase siano caratterizzati da matrici ciclo-simmetriche. Il sistema trifase è quindi simmetrico ed equilibrato e per il suo studio si può fare riferimento al circuito monofase equivalente mostrato in Fig. 26, in cui le impedenze saranno:

$$\dot{Z}_{1e} = (\dot{Z}_{p1} + \alpha^2 \dot{Z}_{m1} + \alpha \dot{Z}_{n1})$$

$$\dot{Z}_{2e} = (\dot{Z}_{p2} + \alpha^2 \dot{Z}_{m2} + \alpha \dot{Z}_{n2})$$

$$\dot{Z}_{3e} = (\dot{Z}_{p3} + \alpha^2 \dot{Z}_{m3} + \alpha \dot{Z}_{n3})$$

Trovate le correnti  $I_A$ ,  $I'_A$  e  $I''_A$ , le altre si ricavano considerando che quelle trovate sono i primi fasori di terne equilibrate.

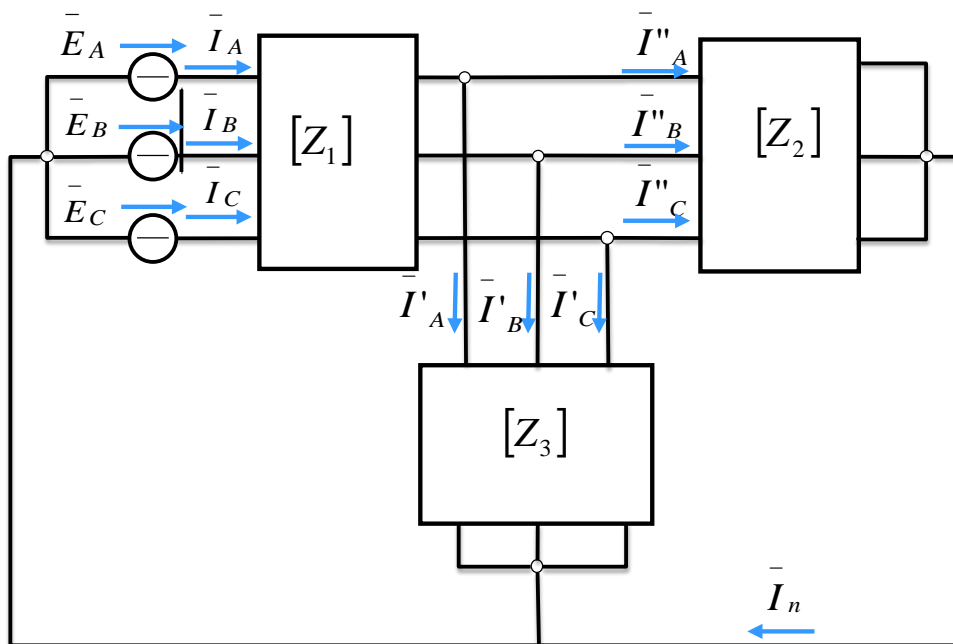


Fig. 25 – Sistema trifase simmetrico ed equilibrato

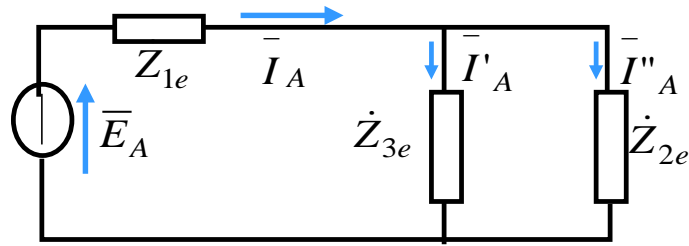


Fig. 26 – Circuito monofase equivalente al circuito trifase di Fig. 25

### Sistemi trifase Simmetrici Squilibrati

La presenza di carichi monofase (ad esempio utilizzatori monofase come quelli domestici) può introdurre uno squilibrio nelle correnti, se i carichi sulle diverse fasi sono differenti fra loro. Nel sistema in bassa tensione si cerca di equilibrare il carico sulle tre fasi cablando opportunamente i carichi monofase, cioè cercando di caricare in modo uguale le tre fasi. Si noti che lo squilibrio dovuto ai carichi monofase, almeno nelle grandi reti, può essere compensato, come verrà mostrato più avanti.

Nel caso di sistema trifase Y-Y con neutro, trascurando l'impedenza dei fili di linea e del filo neutro (considerando cioè i collegamenti ideali), la presenza del neutro assicura l'equipotenzialità dei due centri stella del generatore e del carico (O e O' in Fig. 14). Si possono quindi calcolare le correnti di linea nelle tre fasi in modo indipendente:

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1}{\dot{Z}_1}; \bar{I}_2 = \frac{\bar{E}_2}{\dot{Z}_2}; \bar{I}_3 = \frac{\bar{E}_3}{\dot{Z}_3}$$

$$\bar{I}_0 = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3$$

Nel caso di sistema trifase Y-Y senza neutro, tra il centro stella del carico e il centro stella del generatore viene persa l'equipotenzialità. Si verifica uno spostamento del centro stella del carico rispetto al centro stella del generatore. Tale centro stella può essere trovato calcolando il fasore spostamento del centro stella (Metodo dello Spostamento del Centro Stella).

Facendo riferimento alla Fig. 27, supponiamo che la terna di alimentazione sia una terna simmetrica diretta. La presenza di tre carichi monofase differenti sulle tre fasi fa sì che la terna delle correnti di linea sia una terna squilibrata, e il centro stella O' del carico sia spostato rispetto al centro stella O del generatore.

La tensione  $\bar{V}_{O'O}$  tra il centro stella del carico e il centro stella del generatore può essere calcolata applicando il Teorema di Millmann:

$$\bar{V}_{O'O} = \frac{\bar{E}_1 \dot{Y}_1 + \bar{E}_2 \dot{Y}_2 + \bar{E}_3 \dot{Y}_3}{\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3}$$

Le equazioni del circuito di Fig. 27 sono:

$$\begin{cases} \bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1 - \bar{V}_{O'O}}{\dot{Z}_1} \\ \bar{I}_2 = \frac{\bar{E}_2 - \bar{V}_{O'O}}{\dot{Z}_2} \\ \bar{I}_3 = \frac{\bar{E}_3 - \bar{V}_{O'O}}{\dot{Z}_3} \end{cases}$$

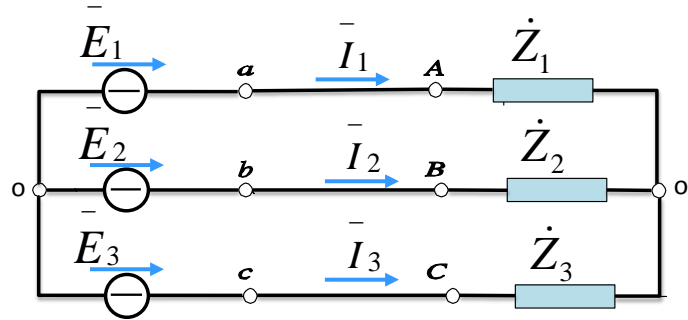


Fig. 27 – Sistema trifase simmetrico e squilibrato senza neutro

Il corrispondente diagramma fasoriale è riportato in Fig. 28.

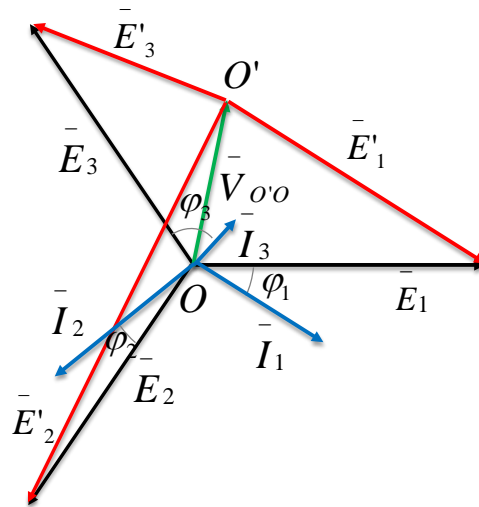


Fig. 28 – Diagramma fasoriale del sistema trifase di Fig. 27.

In nero sono riportate le tensioni stellate del generatore (sistema simmetrico diretto), in rosso le tensioni di fase ai capi delle tre impedenze (sistema dissimmetrico), in blu le correnti di linea (terna squilibrata) e in verde il fasore spostamento del centro stella.

Anche nel caso di sistema trifase Y-Y con neutro, la cui impedenza non sia trascurabile, tra il centro stella del carico e il centro stella del generatore viene persa l'equipotenzialità. Si verifica uno spostamento del centro stella del carico rispetto al centro stella del generatore. Tale centro stella puo' essere ancora trovato utilizzando il Metodo dello Spostamento del Centro Stella.

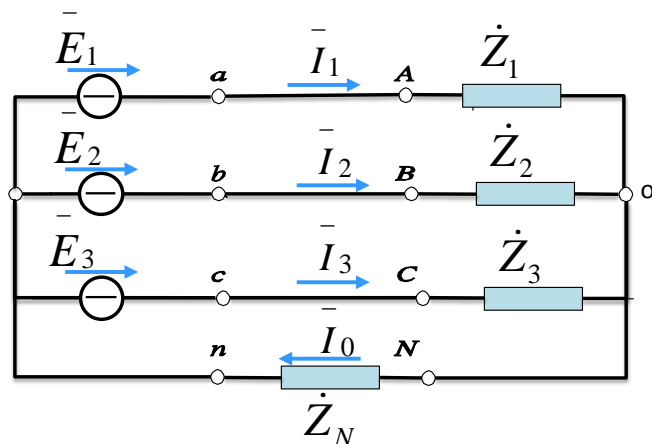


Fig. 29 – Sistema trifase squilibrato con neutro



Facendo riferimento al circuito in Fig. 29, la tensione  $\bar{V}_{O'O}$  tra il centro stella del carico e il centro stella del generatore vale:

$$\bar{V}_{O'O} = \frac{\bar{E}_1 \dot{Y}_1 + \bar{E}_2 \dot{Y}_2 + \bar{E}_3 \dot{Y}_3}{\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3 + \dot{Y}_N}$$

Da cui:

$$\begin{cases} \bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1 - \bar{V}_{O'O}}{\dot{Z}_1} \\ \bar{I}_2 = \frac{\bar{E}_2 - \bar{V}_{O'O}}{\dot{Z}_2} \\ \bar{I}_3 = \frac{\bar{E}_3 - \bar{V}_{O'O}}{\dot{Z}_3} \end{cases}$$

$$\bar{I}_0 = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3$$

In generale, nei casi di sistemi Y- $\Delta$ ,  $\Delta$ -Y, o  $\Delta$ - $\Delta$  il ricorso al metodo dello spostamento del centro stella non è utilizzabile o è troppo oneroso. Si può allora fare ricorso ai consueti metodi di analisi e teoremi utilizzati nei circuiti monofase (metodo delle correnti cicliche o dei potenziali nodali, etc.).

Come esempio riferiamoci al sistema trifase riportato in Fig. 30. Si tratta di un sistema dissimmetrico e squilibrato con generatore a triangolo e carico a triangolo. Le impedenze della linea trifase non sono trascurate.

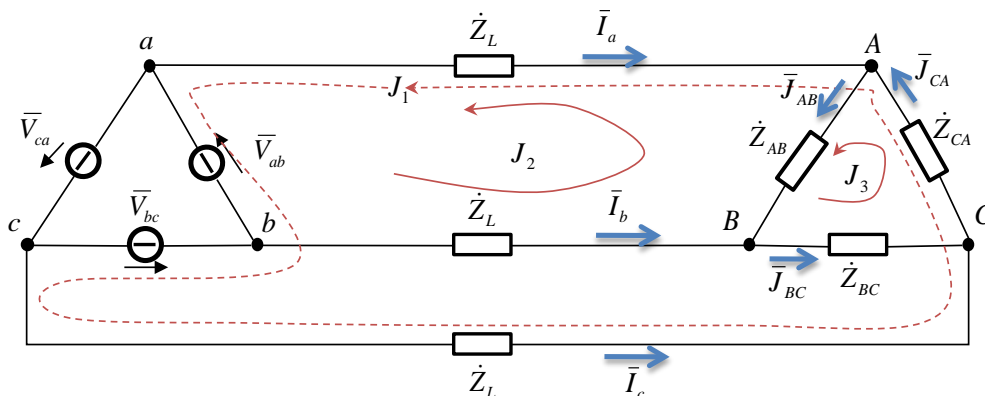


Fig. 30 – Sistema trifase dissimmetrico e squilibrato

Possiamo fare ricorso ai metodi delle correnti cicliche, introducendo 3 correnti fittizie nelle 3 maglie indicate in figura. Si può scrivere il sistema del circuito in funzione delle correnti di maglia nel seguente modo:

$$\begin{bmatrix} (2\dot{Z}_L + \dot{Z}_{CA}) & \dot{Z}_L & \dot{Z}_{CA} \\ \dot{Z}_L & (2\dot{Z}_L + \dot{Z}_{AB}) & -\dot{Z}_{AB} \\ \dot{Z}_{CA} & -\dot{Z}_{AB} & (\dot{Z}_{AB} + \dot{Z}_{BC} + \dot{Z}_{CA}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{J}_1 \\ \bar{J}_2 \\ \bar{J}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{V}_{ab} - \bar{V}_{bc} \\ -\bar{V}_{ab} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Calcolate le correnti di maglia è possibile risalire alle correnti di fase e di linea:

$$\begin{cases} \bar{J}_{AB} = \bar{J}_3 - \bar{J}_2 \\ \bar{J}_{BC} = \bar{J}_3 \\ \bar{J}_{CA} = \bar{J}_3 + \bar{J}_1 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \bar{I}_A = -\bar{J}_1 - \bar{J}_2 \\ \bar{I}_B = \bar{J}_2 \\ \bar{I}_C = \bar{J}_1 \end{cases}$$

Infine consideriamo il caso di un sistema trifase simmetrico e squilibrato in cui lo squilibrio sia dovuto ad un carico monofase inserito tra due fasi (Fig. 31).

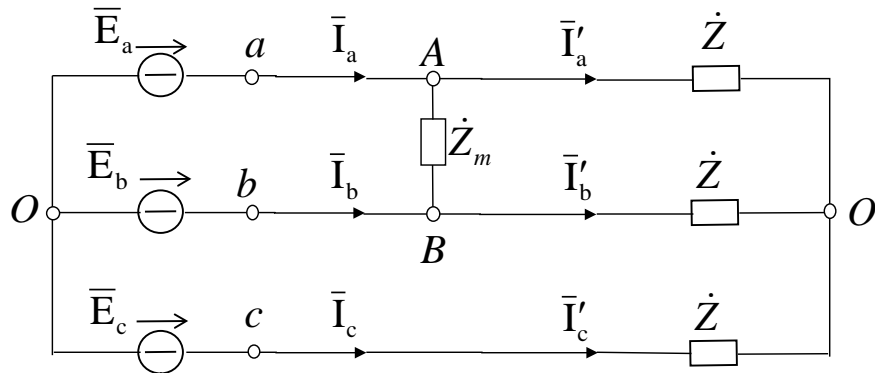


Fig. 31 – Sistema trifase simmetrico e squilibrato

La terna delle correnti  $\bar{I}'_a; \bar{I}'_b; \bar{I}'_c$  costituisce una terna equilibrata. Infatti l'assenza del neutro rende O e O' equipotenziali. Sarà quindi:

$$\bar{I}'_a = \frac{\bar{E}_a}{\dot{Z}}; \bar{I}'_b = \frac{\bar{E}_b}{\dot{Z}}; \bar{I}'_c = \frac{\bar{E}_c}{\dot{Z}}$$

La terna delle correnti  $\bar{I}_a; \bar{I}_b; \bar{I}_c$  sarà invece una terna squilibrata a causa del carico monofase che carica diversamente le tre fasi.

Sarà:

$$\bar{I}_{AB} = \frac{\bar{V}_{AB}}{\dot{Z}_m}$$

con

$$\bar{V}_{AB} = \bar{E}_a - \bar{E}_b$$

Applicando l'equilibrio alle correnti ai nodi A e B si ottiene:

$$\begin{cases} \bar{I}_a = \bar{I}'_a + \bar{I}_{AB} \\ \bar{I}_b = \bar{I}'_b - \bar{I}_{AB} \\ \bar{I}_c = \bar{I}'_c \end{cases}$$

### Potenza nei sistemi trifase

Supponiamo di avere un sistema trifase generico con neutro. Possiamo associare al carico trifase (triplo bipolo) in Fig. 32 le variabili descrittive prendendo come morsetto comune il morsetto N.

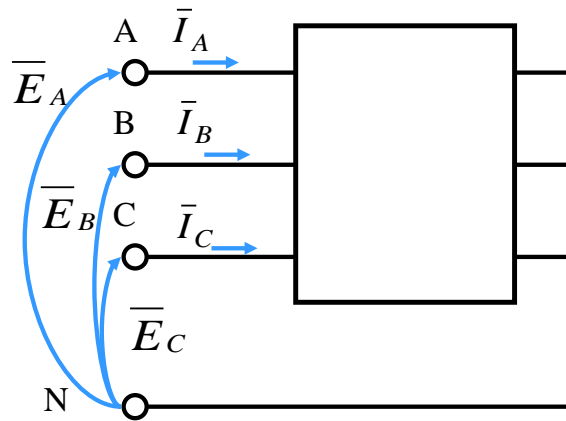


Fig. 32 – Carico trifase con neutro

La potenze istantanea assorbita dal carico sarà:

$$p(t) = e_A(t) \cdot i_A(t) + e_B(t) \cdot i_B(t) + e_C(t) \cdot i_C(t)$$

dove  $e_A, e_B, e_C$  sono le tensioni di fase e  $i_A, i_B, i_C$  sono le correnti di linea.

Se il sistema è in regime sinusoidale si ha:

$$\text{Potenza Attiva: } P = E_A I_A \cos \varphi_A + E_B I_B \cos \varphi_B + E_C I_C \cos \varphi_C$$

$$\text{Potenza Reattiva: } Q = E_A I_A \sin \varphi_A + E_B I_B \sin \varphi_B + E_C I_C \sin \varphi_C$$

dove le E e le I sono i valori efficaci delle grandezze sinusoidali e  $\varphi$  gli angoli tra i fasori tensione e corrente delle stesse fasi.

Si può definire la potenza complessa  $\hat{S} = P + jQ$ , il cui modulo è la potenza apparente  $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$ .

Possiamo anche introdurre un fattore di potenza convenzionale  $\cos \varphi$ , con  $\varphi = \tan^{-1} \frac{Q}{P}$  (in questo caso  $\varphi$  non rappresenta lo sfasamento tra una tensione e una corrente)

Consideriamo ora un carico trifase senza neutro (o puro) riportato in Fig. 33. Osserviamo che può essere visto come un doppio bipolo se prendiamo come morsetto comune alle due porte uno qualunque dei tre morsetti accessibili. Prendendo, ad esempio, come morsetto comune, il morsetto C, le variabili descrittive saranno le tensioni concatenate  $v_{AC}$  e  $v_{BC}$ , e le correnti di linea  $i_A$  e  $i_C$ , con:

$$v_{AC} = e_A - e_C \quad \text{tensioni concatenate}$$

$$v_{BC} = e_B - e_C$$

Inoltre è:

$$i_A + i_B + i_C = 0 \quad \text{per l'assenza del neutro}$$

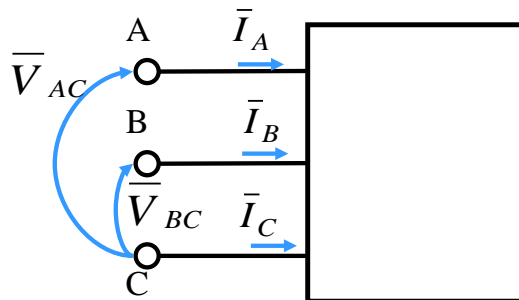


Fig. 33 – Carico trifase senza neutro

La potenza istantanea si può esprimere come:

$$p(t) = v_{AC}i_A + v_{BC}i_B = (e_A - e_C)i_A + (e_B - e_C)i_B = e_Ai_A + e_Bi_B + e_C(-i_A - i_B) = e_Ai_A + e_Bi_B + e_Ci_C$$

Inoltre:

$$P = V_{AC}I_A \cos(\widehat{V_{AC}I_A}) + V_{BC}I_B \cos(\widehat{V_{BC}I_B})$$

$$Q = V_{AC}I_A \sin(\widehat{V_{AC}I_A}) + V_{BC}I_B \sin(\widehat{V_{BC}I_B})$$

Nel caso particolare di sistema trifase simmetrico ed equilibrato in regime sinusoidale, la potenza istantanea sarà:

$$\begin{aligned} p(t) &= e_Ai_A + e_Bi_B + e_Ci_C \\ &= E_{max} \cos \omega t \cdot I_{max} \cos(\omega t - \varphi) + E_{max} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \cdot I_{max} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi\right) \\ &\quad + E_{max} \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \cdot I_{max} \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3} - \varphi\right) \\ &= EI \left\{ \cos \varphi + \cos(2\omega t - \varphi) + \cos \varphi + \cos\left(2\omega t - \frac{4\pi}{3} - \varphi\right) + \cos \varphi + \cos\left(2\omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi\right) \right\} = 3EI \cos \varphi \end{aligned}$$

La potenza istantanea assorbita da un carico trifase è **costante** nel tempo, al contrario di quella relativa ad un carico monofase che ha un andamento oscillatorio.

(Nei passaggi precedenti si utilizza la seguente trasformazione trigonometrica:

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

e si pone:

$$I_{max} = \sqrt{2}I; V_{max} = \sqrt{2}V.$$

In termini di potenza attiva e reattiva si ha:

$$P = 3EI \cos \varphi$$

$$Q = 3EI \sin \varphi$$

con E ed I tensioni di fase e correnti di linea, e  $\varphi$  sfasamento tra tensioni di fase e correnti di linea di ciascuna fase (vedi diagramma fasoriale di Fig. 16).

Questi risultati possono essere espressi in termini di tensioni concatenate, ricordando che, in un sistema trifase simmetrico ed equilibrato è  $V = \sqrt{3}E$ :

$$P = \sqrt{3}VI \cos \varphi$$

$$Q = \sqrt{3}VI \sin \varphi$$

Dove V è il valore efficace delle tensioni concatenate e  $\varphi$  è ancora lo sfasamento tra tensioni di fase e correnti di linea.

$$\text{Inoltre è } S = 3EI = \sqrt{3}VI$$

## Misure nei sistemi trifase

### a) Misure in un carico trifase simmetrico ed equilibrato

Di seguito verranno descritti i principali tipi di inserzione degli strumenti di misura, per la determinazione delle principali grandezze elettriche in gioco nei carichi trifase.

Se si ha un carico equilibrato con il centro stella accessibile, per misurare la potenza assorbita dal carico trifase occorrono un amperometro, un voltmetro e un wattmetro inseriti come in Fig. 34 (facciamo qui l'ipotesi di strumenti ideali).

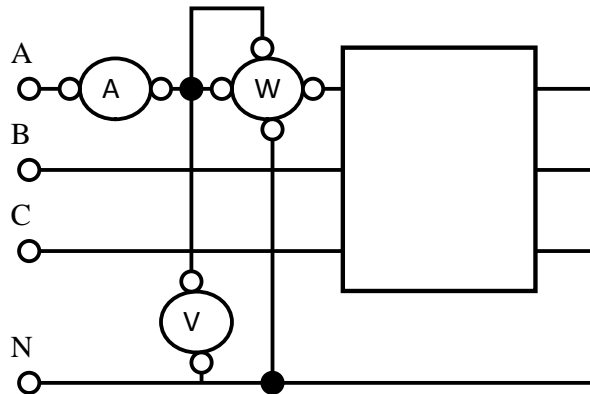


Fig. 34 – Inserzione degli strumenti di misura in un carico trifase equilibrato con neutro

Il wattmetro avrà la bobina voltmetrica derivata fra uno qualunque dei fili di linea ed il neutro, mentre la bobina amperometrica deve essere inserita in serie al filo di linea prescelto. Nei circuiti in regime sinusoidale (monofase e trifase) si utilizzano wattmetri opportuni (generalmente elettrodinamici) che misurano direttamente il prodotto scalare tra il fasore della tensione ai capi della bobina voltmetrica e il fasore della corrente ai capi della bobina amperometrica.

Detta  $P'$  l'indicazione del wattmetro, sarà:

$$P' = \vec{E}_A \cdot \vec{I}_A = E_A I_A \cos(\vec{E}_A \vec{I}_A) = EI \cos \varphi$$

La potenza attiva assorbita dal carico sarà

$$P = 3P'$$

Inoltre, dalla lettura del voltmetro e dell'amperometro, che forniscono i valori efficaci  $E$  ed  $I$  delle grandezze sinusoidali, si ha:

$$S = 3EI$$

Dalla conoscenza di  $S$  e di  $P$  si possono determinare:

$$\cos \varphi = \frac{P}{3EI}$$

da cui:  $|\sin \varphi| = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}$  e quindi  $|Q| = 3EI |\sin \varphi|$

Poiché è possibile determinare il solo valore assoluto di  $\sin \varphi$ , non si può dedurre se il carico è di natura induttiva o capacitiva.

Se il carico (equilibrato), non ha il neutro accessibile, si potrebbe costruire il così detto centro stella artificiale mediante l'impiego di tre impedenze (ad esempio 3 resistenze) di valore uguale collegate a stella, come in Fig. 35.

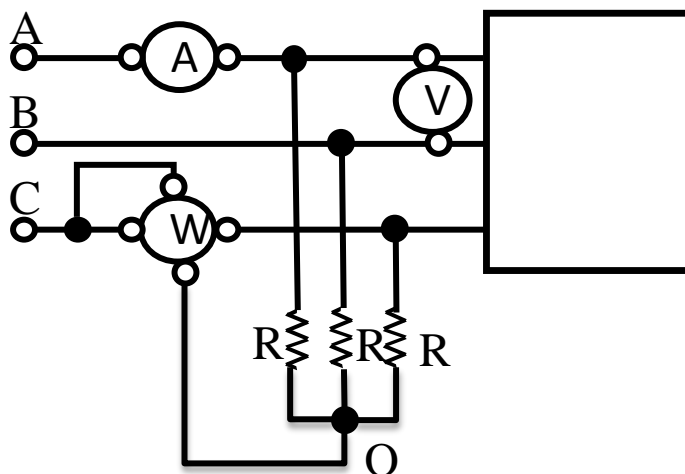


Fig. 35 – Inserzione degli strumenti di misura in un carico trifase equilibrato senza neutro accessibile (O è il centro stella artificiale)

Valgono le stesse considerazioni fatte precedentemente salvo che nella misura sarà compresa anche la potenza attiva assorbita dalle tre resistenze aggiuntive. Inoltre il voltmetro misura il valore efficace della tensione concatenata che, come è noto è  $V = \sqrt{3}E$ .

Potremmo pensare di ricavare il centro stella artificiale mediante l'impiego di due soli resistori di valore pari alla resistenza della bobina voltmetrica del wattmetro (in caso di strumenti di misura non ideali). In tal modo si è sicuri di misurare proprio una potenza pari ad un terzo dell'intera potenza attiva dissipata dal carico. Infatti la tensione sulla voltmetrica coincide con la tensione di fase (vedi Fig. 36).

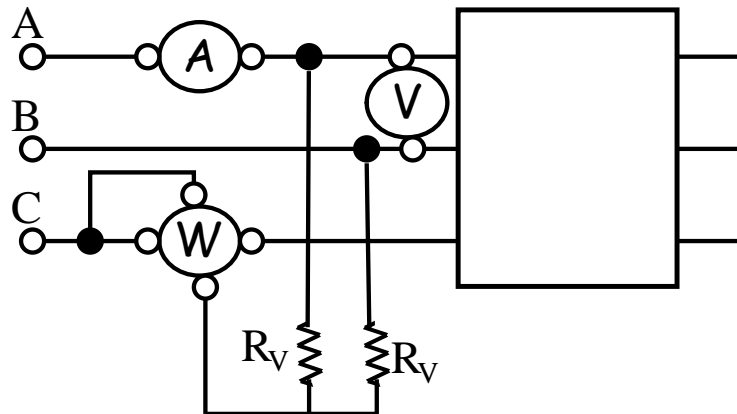


Fig. 36 – Inserzione degli strumenti di misura in un carico trifase equilibrato senza neutro accessibile

Un'alternativa a questo tipo di inserzione consiste nella così detta inserzione ARON. Viene eseguita utilizzando due wattmetri inseriti con le bobine amperometriche disposte in serie su due qualunque dei tre fili di linea, e le bobine voltmetriche derivate fra il filo che contiene l'amperometrica, e il terzo filo, così come mostrato in Fig. 37.

Si supponga che la terna delle tensioni di fase sia simmetrica diretta, cioè le tensioni (e quindi le correnti) siano geometricamente disposte, con riferimento ai fasori, secondo i ritardi di fase (sequenza diretta).

Siano inoltre  $P'$  e  $P''$  le misure dei wattmetri  $W'$  e  $W''$  rispettivamente.

Per ricavare le grandezze  $P'$  e  $P''$  si faccia riferimento al diagramma fasoriale di Fig. 38.

$$P' = V_{12} I_1 \cos(\widehat{V_{12} I_1})$$

$$P'' = V_{32} I_3 \cos(\widehat{V_{32} I_3})$$

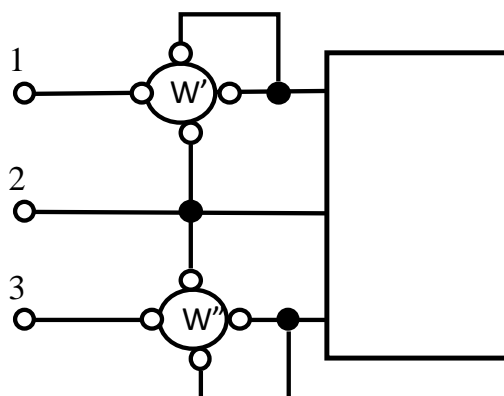


Fig. 37 – Inserzione Aron

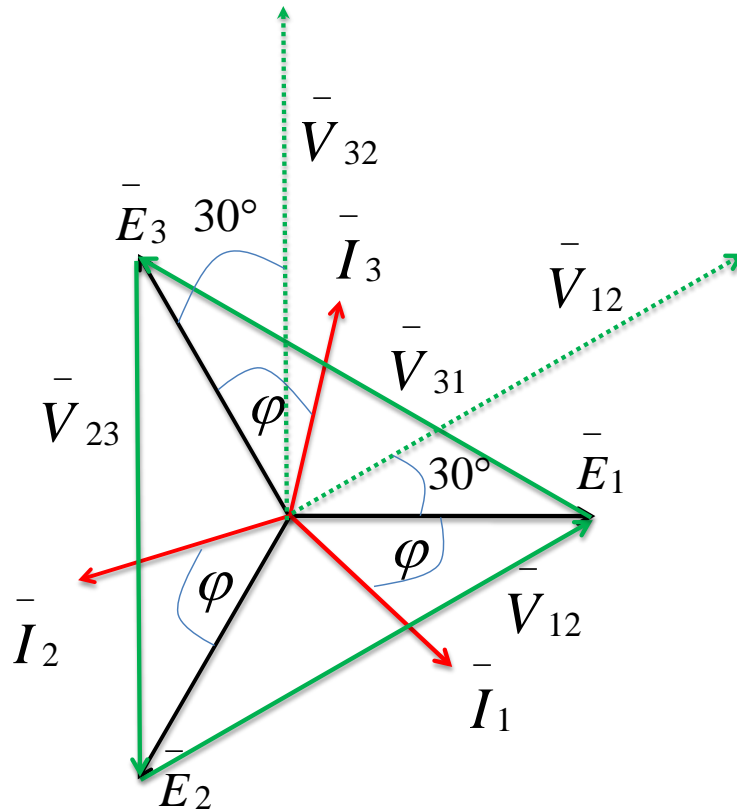


Fig. 38 – Diagramma fasoriale delle grandezze elettriche in gioco nell'inserzione ARON

Dal diagramma fasoriale di Fig. 38 si ricava che l'angolo di sfasamento fra  $\bar{V}_{12}$  e  $\bar{I}_1$  è pari a  $\varphi + 30^\circ$ , mentre l'angolo di sfasamento fra  $\bar{V}_{32}$  e  $\bar{I}_3$  è pari a  $\varphi - 30^\circ$ , da cui:

$$P' = V_{12}I_1 \cos(\widehat{\bar{V}_{12}\bar{I}_1}) = V_{12}I_1 \cos(\varphi + 30^\circ) = VI \cos(\varphi + 30^\circ)$$

$$P'' = V_{32}I_3 \cos(\widehat{\bar{V}_{32}\bar{I}_3}) = V_{32}I_3 \cos(\varphi - 30^\circ) = VI \cos(\varphi - 30^\circ)$$

e poiché:  $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$

$$P' + P'' = VI[\cos(\varphi + 30^\circ) + \cos(\varphi - 30^\circ)] = \sqrt{3}EI \cos \frac{2\varphi}{2} \cos \frac{60^\circ}{2} = 3EI \cos \varphi = \sqrt{3}VI \cos \varphi = P$$

La somma delle letture dei due wattmetri fornisce la potenza attiva assorbita dal carico.

Inoltre, poiché è:  $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$

$$P'' - P' = VI[\cos(\varphi - 30^\circ) - \cos(\varphi + 30^\circ)] = -\sqrt{3}EI \sin \frac{-60^\circ}{2} \sin \frac{2\varphi}{2} = -\sqrt{3}EI \sin \varphi$$

$$= \sqrt{3}EI \sin \varphi = \frac{Q}{\sqrt{3}}$$

$$Q = \sqrt{3}(P'' - P') = 3EI \sin \varphi = \sqrt{3}VI \sin \varphi$$

La potenza reattiva assorbita dal carico è  $\sqrt{3}$  volte la differenza  $P''-P'$ .

La lettura dei due wattmetri consente di determinare sia la potenza attiva che la potenza reattiva e quindi anche la potenza apparente  $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$  senza ricorrere all'uso del voltmetro e dell'amperometro.

Nota: le letture dei due wattmetri sono identiche fra di loro solo per  $\varphi = 0$ , cioè  $\cos \varphi = 1$ ; per ogni altro valore di  $\varphi$ , le due indicazioni sono differenti e consentono la deduzione di  $\varphi$ , e quindi del fattore di potenza  $\cos \varphi$ :

$$\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}VI \sin \varphi}{\sqrt{3}VI \cos \varphi} = \frac{Q}{P} = \sqrt{3} \frac{P'' - P'}{P'' + P'}$$

Se l'ordine ciclico è diretto, man mano che  $\varphi$  cresce  $P'$  si riduce rispetto a  $P''$ , cioè la potenza reattiva varia al variare di  $\varphi$ .

Se  $\varphi$  cresce oltre  $60^\circ$ ,  $P'$  diventa negativo e bisogna tenerne conto in quanto la somma di  $P'$  e  $P''$  deve essere sempre intesa come somma algebrica. Se il wattmetro non è a zero centrale, bisogna comunque stare attenti ad introdurre nella lettura l'opportuno segno, funzione di  $\varphi$ . Tutte queste considerazioni hanno come presupposto la conoscenza dell'ordine ciclico delle tre fasi, infatti, noto l'ordine ciclico, attraverso i segni di  $P'$  e  $P''$  possono determinarsi il segno della potenza reattiva, e di conseguenza la natura del carico.

Se l'ordine ciclico è diretto e  $P'' - P' < 0$  allora la potenza reattiva è capacitiva, e il carico è prevalentemente capacitivo, viceversa se  $P'' - P' > 0$  la potenza reattiva è induttiva, e il carico è prevalentemente induttivo.

Se invece si conosce la natura del carico, si può determinare il senso ciclico delle fasi. Ad esempio, se il carico è induttivo sappiamo che  $Q > 0$ ; se si trova  $P'' - P' < 0$  si deduce che il senso ciclico è inverso.

#### b) Misure in un carico trifase squilibrato

Si supponga dapprima che la terna alimentante sia ancora simmetrica ma il carico sia squilibrato, cioè la terna delle correnti di linea sia una terna squilibrata, il diagramma fasoriale corrispondente sarà quello di Fig. 39 (a), con  $E_1 = E_2 = E_3; I_1 \neq I_2 \neq I_3; \varphi_1 \neq \varphi_2 \neq \varphi_3$ . Nel caso in cui la terna di alimentazione sia dissimmetrica e il carico squilibrato, il diagramma fasoriale corrispondente sarà quello di Fig. 39 (b), con  $E_1 \neq E_2 \neq E_3; I_1 \neq I_2 \neq I_3; \varphi_1 \neq \varphi_2 \neq \varphi_3$

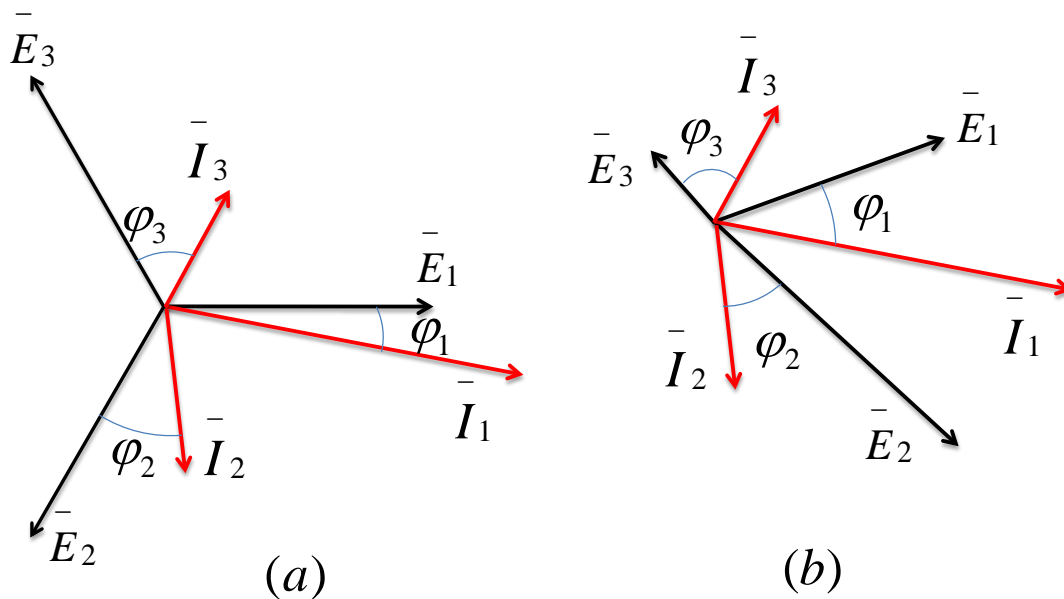


Fig. 39 – Diagramma fasoriale per un carico a) simmetrico e squilibrato e b) dissimmetrico e squilibrato  
In entrambi i casi è possibile fare ricorso alla definizione di potenza attiva e reattiva introdotte precedentemente:

$$\text{Potenza Attiva: } P = E_1 I_1 \cos \varphi_1 + E_2 I_2 \cos \varphi_2 + E_3 I_3 \cos \varphi_3 = \sum_{i=1}^3 E_i I_i \cos \varphi_i$$

$$\text{Potenza Reattiva: } Q = E_1 I_1 \sin \varphi_1 + E_2 I_2 \sin \varphi_2 + E_3 I_3 \sin \varphi_3 = \sum_{i=1}^3 E_i I_i \sin \varphi_i$$

$$\text{Potenza Complessa: } \dot{S} = P + jQ$$

$$\text{Potenza Apparente: } S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Da ciò si deduce che la misura della potenza assorbita da un carico trifase con neutro accessibile può essere ottenuta sommando le indicazioni di tre wattmetri inseriti come in Fig. 40.



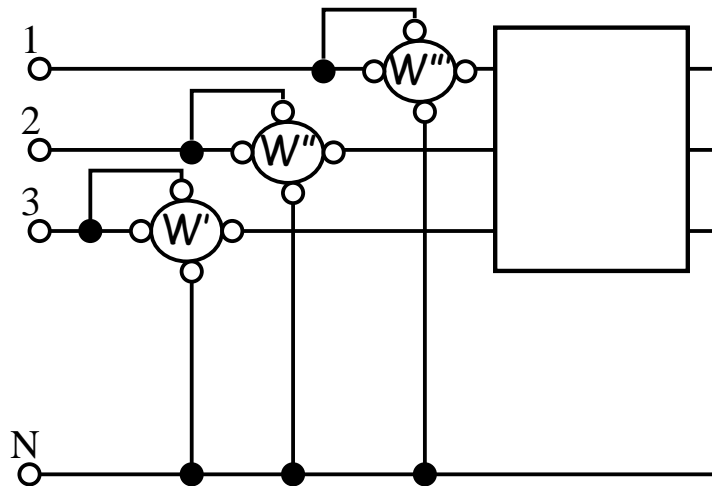


Fig. 40- Inserzione degli strumenti di misura in un carico trifase squilibrato con neutro accessibile

Se il neutro non è accessibile, possiamo, come precedentemente specificato, prendere uno dei tre fili di linea come filo di riferimento (ad esempio il filo 2) e utilizzare le espressioni per il calcolo della potenza attiva precedentemente ricavata e qui riportate per il caso in esame:

$$P = V_{12}I_1 \cos(\widehat{V_{12}I_1}) + V_{32}I_3 \cos(\widehat{V_{32}I_3})$$

Poichè i due termini del secondo membro dell'equazione precedente non sono altro che le misure dei due wattmetri inseriti in ARON come riportato in Fig. 37, allora la totale potenza attiva può essere ancora ricavata mediante l'utilizzo di due soli wattmetri inseriti in ARON. Non si può invece dedurre la misura della potenza reattiva dalla lettura dei due wattmetri.

Esistono altri tipi di inserzione, che consentono di misurare anche la potenza reattiva, e che prevedono l'uso di tre wattmetri. Uno di questi è l'inserzione Righi, riportata in Fig. 41, che consiste in due wattmetri collegati in ARON, più un terzo wattmetro inserito con l'amperometrica sul filo di riferimento e la volumetrica sugli altri due fili. Si dice che il terzo wattmetro è in quadratura rispetto ai due wattmetri in ARON.

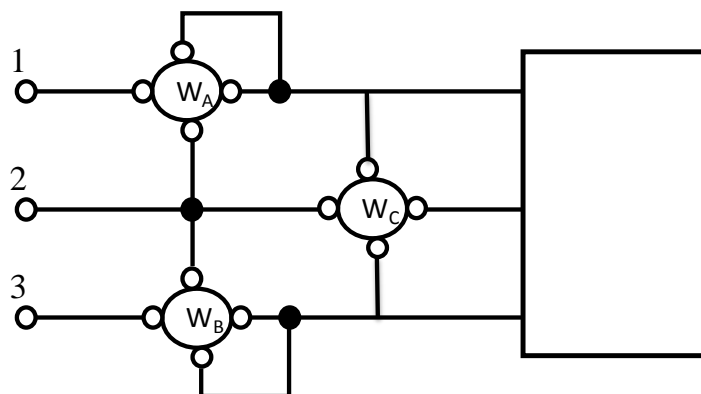


Fig. 41 – Inserzione Righi

Si può dimostrare che l'espressione della potenza reattiva è la seguente:

$$Q = \frac{A - B + 2C}{\sqrt{3}}$$

Dove A, B, e C sono le indicazioni fornite dai tre wattmetri  $W_A$ ,  $W_B$ , e  $W_C$  rispettivamente, e A è la misura del wattmetro che fornisce l'indicazione maggiore.

Se supponiamo di conoscere la sequenza della terna di alimentazione, è possibile determinare anche la natura del carico. A seconda che Q risulti positivo o negativo il carico sarà induttivo o capacitivo. (Si rimanda la dimostrazione a corsi successivi di Misure Elettriche).

## Principali vantaggi dei sistemi trifase

Il trasporto e la distribuzione di energia elettrica avvengono in prevalenza per mezzo di linee trifase per varie ragioni che fanno preferire tali sistemi rispetto a quelli monofase. Gli impieghi dei sistemi trifase si trovano nella produzione, trasporto, distribuzione, e utilizzazione dell'energia a frequenza industriale (i sistemi monofase sono impiegati in applicazioni specifiche come impianti di piccola potenza, per uso domestico, trazione, elettrochimici, etc.).

La prima utilità risiede nel fatto che, a parità di tensione, potenza trasportata e perdite ammesse, con una linea trifase si utilizza un volume di rame inferiore del 25% rispetto ad una linea monofase. In Fig. 42 sono riportate le due configurazioni a confronto.

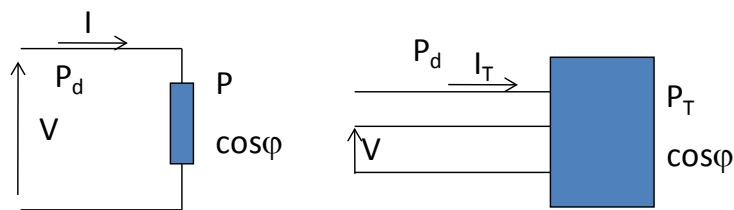


Fig. 42 – Confronto fra sistemi monofase e trifase.

### Dimostrazione

Sia L la lunghezza della linea in entrambi i sistemi, monofase e trifase, sia V il valore efficace della tensione nel carico monofase, pari al valore efficace delle tensioni concatenate nel carico trifase, siano I e  $I_T$  i valori efficaci delle correnti nella linea monofase e trifase rispettivamente. Le potenze assorbite dai carichi monofase e trifase saranno:

$$P = VI\cos\varphi; P_T = \sqrt{3}VI_T\cos\varphi$$

Imponendo l'uguaglianza delle due potenze:

$$P = P_T \Rightarrow VI\cos\varphi = \sqrt{3}VI_T\cos\varphi \Rightarrow I_T = \frac{I}{\sqrt{3}}$$

Le potenze dissipate nelle linee monofase e trifase saranno:

$$P_d = 2RI^2 = 2\rho\frac{L}{S}I^2; P_{dT} = 3R_T I_T^2 = 3\rho\frac{L}{S_T}I_T^2$$

Dove  $\rho$  è la resistività del materiale dei conduttori, e S ed  $S_T$  le sezioni dei conduttori della linea monofase e trifase rispettivamente.

Imponendo l'uguaglianza delle potenze dissipate sarà:

$$P_d = P_{dT} = 2\rho\frac{L}{S}I^2 = 3\rho\frac{L}{S_T}I_T^2 \Rightarrow 2\rho\frac{L}{S}I^2 = 3\rho\frac{L}{S_T}\frac{I^2}{3} \Rightarrow S_T = \frac{S}{2}$$

Il volume di rame da impiegare nelle linee monofase e trifase saranno:

$$v = 2LS; v_T = 3LS_T$$

Sostituendo il valore di  $S_T$  in funzione di S si ottiene:

$$v_T = 3LS_T = 3L\frac{S}{2} = \frac{3}{4}v \quad \text{c.v.d.} \quad \blacksquare$$

Una seconda utilità discende dal fatto che un sistema trifase di correnti può essere utilizzato per generare un campo magnetico rotante, su cui si basa il funzionamento delle macchine elettriche rotanti in corrente alternata (motori asincroni trifase per potenze sino a diverse decine di MW, e generatori trifase).

Inoltre i generatori trifase consentono un miglior sfruttamento dei conduttori e del circuito magnetico (una completa comprensione di questi vantaggi potrà essere acquisita più avanti quando verrà approfondito lo studio delle macchine elettriche rotanti).

Inoltre, in un sistema simmetrico ed equilibrato la potenza istantanea assorbita da un carico trifase è costante. Quindi la coppia in un motore trifase è costante. Vengono così evitati i gravosi inconvenienti (soprattutto di natura meccanica) connessi con la potenza variabile nel tempo dei carichi monofase. In

particolare, diminuisce il rischio di oscillazioni meccaniche, ed inoltre gli organi della macchina sono dimensionati per la coppia media anziché per la coppia massima.

Inoltre, nel caso di sistemi trifase con neutro, si hanno a disposizione due livelli di tensione, quelle stellate e quelle concatenate.

Infine, poiché a parità di potenza trasportata le correnti nei sistemi trifase sono inferiori a quelle monofase (vedi dimostrazione precedente), anche gli organi di protezione e manovra nei sistemi trifase potranno essere dimensionati per valori inferiori rispetto ai sistemi monofase.

### Cause di Squilibrio di un sistema trifase

Come già visto in precedenza, non sempre ci si trova ad avere sistemi di tensioni simmetriche e correnti equilibrate, a prescindere dal fatto che la terna delle tensioni di alimentazione sia simmetrica. Questo è dovuto sia alla presenza di carichi monofase che caricano differenzialmente le tre fasi, sia alla presenza di guasti. Infatti, si può fare l'ipotesi che i carichi trifase siano equilibrati (con matrici almeno ciclo simmetriche).

Nel primo caso, è possibile, come si vedrà di seguito, procedere, almeno nelle grandi reti, ad una equilibratura dei carichi monofase.

Il secondo caso, invece, è più importante perché coinvolge generalmente grandi potenze, e riguarda eventi imprevedibili dovuti a cause accidentali, o atmosferiche, quali la rottura dell'isolamento o le fulminazioni delle linee aeree. È importante studiare queste condizioni di funzionamento anomale per poter dimensionare correttamente gli organi di protezione, per il dimensionamento dei poteri di interruzione degli interruttori automatici, per il dimensionamento degli interruttori di manovra, per la valutazione degli sforzi elettrodinamici e termici a cui sono sottoposte le apparecchiature elettriche, per il coordinamento delle protezioni.

Possiamo avere differenti tipi di guasto. I più importanti riguardano i cortocircuiti che possono stabilirsi fra due fasi, oppure fra una fase ed il neutro (o la terra), o fra fase-fase e neutro (terra), o ancora fra tutte e tre le fasi, e tra tutte le fasi e il neutro (o la terra).

In generale, l'analisi di sistemi trifasi simmetrici e squilibrati può essere studiata impostando le equazioni del circuito, applicando le leggi di Kirchhoff, e, dove possibile, servendosi dei teoremi e dei metodi di analisi semplificata, introdotti nello studio dei circuiti monofase. Tuttavia, quando si studiano circuiti di una certa complessità, l'analisi diventa piuttosto onerosa. È utile in questo caso introdurre il *Principio di Scomposizione*, e la *Teoria delle Componenti Simmetriche*.

### Principio di Scomposizione

Il Principio di Scomposizione afferma che qualsiasi terna di fasori può essere scomposta in tre terne: una simmetrica diretta, una simmetrica inversa e una terna omopolare.

Per ricavare, nota la terna di partenza, le terne componenti, e viceversa, ci si serve di una trasformazione lineare delle variabili descrittive, basata sulle *Matrici di Fortescue* diretta ed inversa.

La Matrice di Fortescue Diretta è definita nel seguente modo:

$$[F] = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{bmatrix}$$

La Matrice di Fortescue Inversa è definita nel seguente modo:

$$[F]^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix}$$

Prendendo una qualunque terna di fasori e pre-moltiplicandola per  $[F]$  otteniamo i fasori rappresentativi delle 3 terne di componenti dette *Terne di Sequenza*. I fasori rappresentativi sono i primi fasori delle 3 terne.

Sia:  $\begin{bmatrix} \bar{E}_1 \\ \bar{E}_2 \\ \bar{E}_3 \end{bmatrix}$  la terna di partenza, che supponiamo essere dissimmetrica (Fig. 43). Sarà:

$$\begin{bmatrix} \bar{E}_o \\ \bar{E}_d \\ \bar{E}_i \end{bmatrix} = [F] \begin{bmatrix} \bar{E}_1 \\ \bar{E}_2 \\ \bar{E}_3 \end{bmatrix} \text{ o anche: } \begin{cases} \bar{E}_o = \frac{1}{\sqrt{3}}(\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3) \\ \bar{E}_d = \frac{1}{\sqrt{3}}(\bar{E}_1 + \alpha\bar{E}_2 + \alpha^2\bar{E}_3) \\ \bar{E}_i = \frac{1}{\sqrt{3}}(\bar{E}_1 + \alpha^2\bar{E}_2 + \alpha\bar{E}_3) \end{cases}$$

dove  $\bar{E}_o$  è il primo fasore della terna di sequenza omopolare,  $\bar{E}_d$  è il primo fasore della terna di sequenza diretta, e  $\bar{E}_i$  è il primo fasore della terna di sequenza inversa.

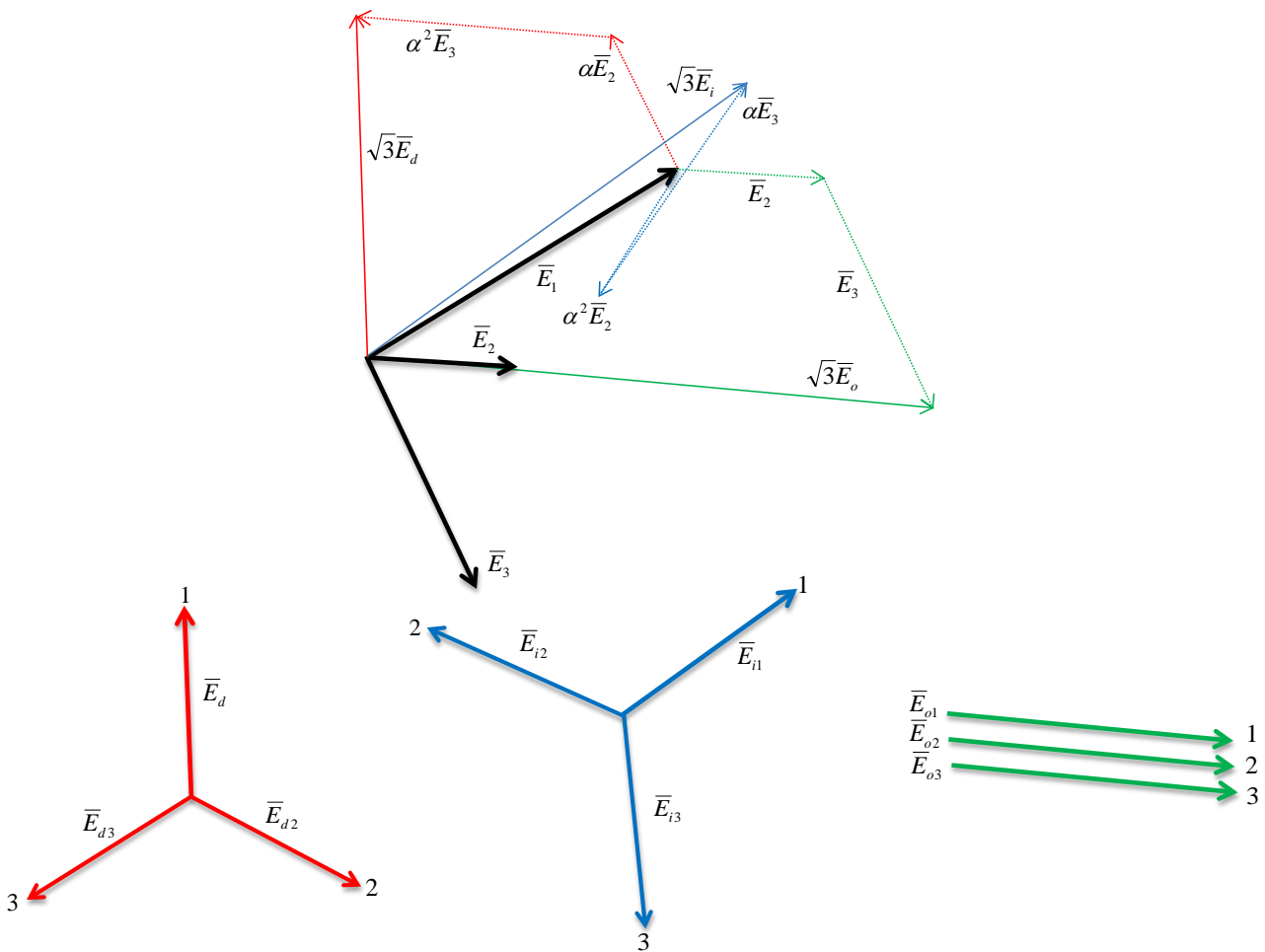


Fig. 43 – Scomposizione della terna  $\begin{bmatrix} \bar{E}_1 \\ \bar{E}_2 \\ \bar{E}_3 \end{bmatrix}$ .

Per ottenere le tre terne di sequenza basterà applicare ai fasori rappresentativi la terna di operatori di rotazione:

$$\begin{bmatrix} \bar{E}_{d1} \\ \bar{E}_{d2} \\ \bar{E}_{d3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} \cdot \bar{E}_d; \quad \begin{bmatrix} \bar{E}_{i1} \\ \bar{E}_{i2} \\ \bar{E}_{i3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{bmatrix} \cdot \bar{E}_i; \quad \begin{bmatrix} \bar{E}_{o1} \\ \bar{E}_{o2} \\ \bar{E}_{o3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \bar{E}_o$$

Nota 1:

Se la terna di partenza è una terna simmetrica diretta allora ammetterà solo componente diretta, cioè:

$$\bar{E}_o = 0; \bar{E}_i = 0; \bar{E}_d = \sqrt{3}\bar{E}_A$$

Infatti:

$$\begin{bmatrix} \bar{E}_1 \\ \bar{E}_2 \\ \bar{E}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} \cdot \bar{E}_1$$

$$\begin{aligned} \bar{E}_o &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\bar{E}_1 + \alpha^2\bar{E}_1 + \alpha\bar{E}_1) = 0 \\ \begin{bmatrix} \bar{E}_o \\ \bar{E}_d \\ \bar{E}_i \end{bmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} \cdot \bar{E}_1 \Rightarrow \bar{E}_d = \frac{1}{\sqrt{3}}(\bar{E}_1 + \alpha^3\bar{E}_1 + \alpha^3\bar{E}_1) = \frac{3}{\sqrt{3}}\bar{E}_1 \\ \bar{E}_i &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\bar{E}_1 + \alpha\bar{E}_1 + \alpha^2\bar{E}_1) = 0 \end{aligned}$$

Analogamente se la terna di partenza è una terna simmetrica inversa, ammetterà solo componente di sequenza inversa.

Nota 2:

Se  $(\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3) = 0$ , cioè se la terna di partenza è una terna PURA allora  $\bar{E}_o = 0$

Dalla precedente considerazione si evince che una terna di tensioni concatenate può essere descritta da una terna diretta e da una inversa.

Le tensioni stellate non costituiscono in genere una terna pura. La componente omopolare sarà pari alla distanza del punto corrispondente al centro stella dal baricentro del triangolo delle tensioni concatenate. Se la somma delle tensioni stellate è nulla, allora il centro stella si trova nel baricentro del triangolo delle tensioni concatenate.

Le correnti di linea in assenza di conduttore neutro costituiscono un sistema puro e quindi la componente omopolare è nulla.

Nota 3:

$[F]$  e  $[F]^{-1}$  sono adimensionali.

Nota 4:

Si può verificare che:

$$\begin{bmatrix} \bar{E}_1 \\ \alpha^2\bar{E}_1 \\ \alpha\bar{E}_1 \end{bmatrix} = [F]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{3}\bar{E}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

### Analisi delle reti trifase mediante la Teoria delle Componenti Simmetriche

La procedura di decomposizione vista precedentemente è alla base della semplificazione dell'analisi per le reti trifase. Per rendersi conto dell'utilità di tale procedura, consideriamo il generico sistema trifase di Fig. 44.

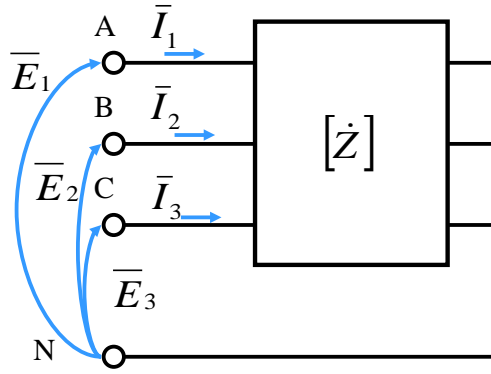


Fig. 44 – Sistema trifase

Il sistema di equazioni che lo descrive è il seguente:

$$\underline{\bar{E}} = [\underline{\dot{Z}}]\underline{\bar{I}}$$

Dove  $\underline{\bar{E}}$  ed  $\underline{\bar{I}}$  rappresentano le terne delle tensioni di fase e delle correnti di linea e  $[\underline{\dot{Z}}]$  è la matrice di impedenza del carico trifase. Supponiamo che tale matrice sia ciclo simmetrica.

Possiamo pre-moltiplicare ambo i membri della precedente relazione per la matrice di Fortescue diretta, e pre-moltiplicare il vettore  $\underline{\bar{I}}$  per la matrice identità ottenuta come prodotto di  $[F]^{-1}$  per  $[F]$ :

$$[F]\underline{\bar{E}} = [F][\underline{\dot{Z}}][F]^{-1}[F]\underline{\bar{I}} = [\underline{\dot{Z}}'] [F]\underline{\bar{I}} \Rightarrow \begin{bmatrix} \bar{E}_o \\ \bar{E}_d \\ \bar{E}_i \end{bmatrix} = [\underline{\dot{Z}}'] \begin{bmatrix} \bar{I}_o \\ \bar{I}_d \\ \bar{I}_i \end{bmatrix}$$

Si noti che gli auto valori di  $[\underline{\dot{Z}}]$  sono gli stessi della  $[\underline{\dot{Z}}']$ . Se  $[\underline{\dot{Z}}]$  fosse dissimmetrica (né ciclo simmetrica né tanto meno simmetrica) allora la  $[\underline{\dot{Z}}']$  sarebbe una matrice piena ed il cambiamento di base non porterebbe ad alcuna semplificazione. Se invece  $[\underline{\dot{Z}}]$  è almeno ciclo simmetrica, dimostreremo che la matrice  $[\underline{\dot{Z}}']$  è una matrice diagonale:

$$[\underline{\dot{Z}}'] = \begin{bmatrix} \dot{Z}_o & 0 & 0 \\ 0 & \dot{Z}_d & 0 \\ 0 & 0 & \dot{Z}_i \end{bmatrix} \text{ con } \begin{cases} \dot{Z}_o = \dot{Z}_p + \dot{Z}_m + \dot{Z}_n \\ \dot{Z}_d = \dot{Z}_p + \alpha^2 \dot{Z}_m + \alpha \dot{Z}_n \\ \dot{Z}_i = \dot{Z}_p + \alpha \dot{Z}_m + \alpha^2 \dot{Z}_n \end{cases}$$

da cui il precedente sistema:

$$[F]\underline{\bar{E}} = [\underline{\dot{Z}}'] [F]\underline{\bar{I}} \Rightarrow \begin{bmatrix} \bar{E}_o \\ \bar{E}_d \\ \bar{E}_i \end{bmatrix} = [\underline{\dot{Z}}'] \begin{bmatrix} \bar{I}_o \\ \bar{I}_d \\ \bar{I}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Z}_o & 0 & 0 \\ 0 & \dot{Z}_d & 0 \\ 0 & 0 & \dot{Z}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_o \\ \bar{I}_d \\ \bar{I}_i \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \bar{E}_o = \dot{Z}_o \cdot \bar{I}_o \\ \bar{E}_d = \dot{Z}_d \cdot \bar{I}_d \\ \bar{E}_i = \dot{Z}_i \cdot \bar{I}_i \end{cases}$$

*Dimostrazione:*

$$\begin{aligned} [\underline{\dot{Z}}'] &= [F][\underline{\dot{Z}}][F]^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{Z}_p & \dot{Z}_m & \dot{Z}_n \\ \dot{Z}_n & \dot{Z}_p & \dot{Z}_m \\ \dot{Z}_m & \dot{Z}_n & \dot{Z}_p \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\dot{Z}_p + \dot{Z}_m + \dot{Z}_n) & (\dot{Z}_p + \alpha^2 \dot{Z}_m + \alpha \dot{Z}_n) & (\dot{Z}_p + \alpha \dot{Z}_m + \alpha^2 \dot{Z}_n) \\ (\dot{Z}_p + \dot{Z}_m + \dot{Z}_n) & (\dot{Z}_n + \alpha^2 \dot{Z}_p + \alpha \dot{Z}_m) & (\dot{Z}_n + \alpha \dot{Z}_p + \alpha^2 \dot{Z}_m) \\ (\dot{Z}_p + \dot{Z}_m + \dot{Z}_n) & (\dot{Z}_m + \alpha^2 \dot{Z}_n + \alpha \dot{Z}_p) & (\dot{Z}_m + \alpha \dot{Z}_n + \alpha^2 \dot{Z}_p) \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3(\dot{Z}_p + \dot{Z}_m + \dot{Z}_n) & 0 & 0 \\ 0 & 3(\dot{Z}_p + \alpha^2 \dot{Z}_m + \alpha \dot{Z}_n) & 0 \\ 0 & 0 & 3(\dot{Z}_p + \alpha \dot{Z}_m + \alpha^2 \dot{Z}_n) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (\dot{Z}_p + \dot{Z}_m + \dot{Z}_n) & 0 & 0 \\ 0 & (\dot{Z}_p + \alpha^2 \dot{Z}_m + \alpha \dot{Z}_n) & 0 \\ 0 & 0 & (\dot{Z}_p + \alpha \dot{Z}_m + \alpha^2 \dot{Z}_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Z}_o & 0 & 0 \\ 0 & \dot{Z}_d & 0 \\ 0 & 0 & \dot{Z}_i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ogni componente di tensione è legata alla relativa componente di corrente. La struttura diagonale della matrice  $[\hat{Z}']$  rende le tre relazioni indipendenti tra di loro.

I tre elementi della matrice  $\hat{Z}_o, \hat{Z}_d,$  e  $\hat{Z}_i$  sono chiamati impedenza alla sequenza omopolare, impedenza alla sequenza diretta, e impedenza alla sequenza inversa, rispettivamente.

Ogni terna di sequenza farà circolare una corrente della stessa sequenza.

Dalle considerazioni precedenti si ricava che, ogni sistema trifase dissimmetrico e squilibrato può scomporsi in tre sistemi trifase che si riconducono allo studio separato di tre circuiti monofase corrispondenti, rispettivamente, alla sequenza diretta, alla sequenza inversa, alla sequenza omopolare. Tali reti sono chiamate reti di sequenza (Fig. 45).

Al verificarsi di un guasto le tre reti dovranno essere opportunamente interconnesse in modo da verificare sia le condizioni imposte dal guasto che il tipo di rete (neutro isolato, a terra, etc.).

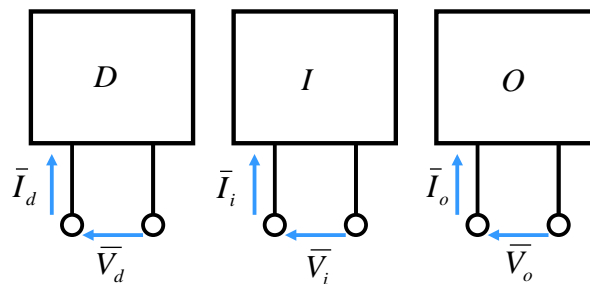


Fig. 45 – Reti monofase di sequenza

### Condizioni di guasto per le reti di sequenza

Come già detto, un guasto è un contatto tra le parti in tensione, quindi tra le fasi, tra le fasi ed il neutro, o tra le fasi e la terra. Il contatto può avvenire con impedenza nulla (cortocircuito netto, o guasto franco), o con impedenza diversa da zero. E' generalmente valida l'ipotesi che la terna alimentante sia simmetrica. Il guasto impone, nella sezione in cui avviene, determinati valori di tensione e corrente che definiscono, in generale, terne non simmetriche di entrambe. In generale, sono presenti, sia per le tensioni che per le correnti, tutte le sequenze. Ogni tipo di guasto corrisponde ad un determinato collegamento tra le reti monofase di sequenza.

Per ricavare le così dette *Condizioni di Guasto*, prendiamo in considerazione la sezione di guasto, e siano  $\bar{I}_1,$   $\bar{I}_2,$  ed  $\bar{I}_3$  le correnti di guasto (Fig. 46).

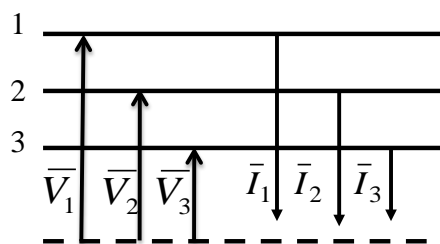


Fig. 46 – Sezione di guasto

Facciamo l'ipotesi che il neutro sia a terra, e che la terna alimentante sia una terna simmetrica, cioè:

$$E_1 = E_2 = E_3$$

In assenza di guasto sarà:

$$\bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \bar{V}_3 = 0; \bar{I}_1 = \bar{I}_2 = \bar{I}_3 = 0$$

da cui:

$$\begin{aligned} \bar{I}_d = \bar{I}_i = \bar{I}_o = 0 \\ \bar{E}_d = \frac{3}{\sqrt{3}} \bar{E}_1 = \frac{3}{\sqrt{3}} \bar{E}_2 = \frac{3}{\sqrt{3}} \bar{E}_3 \\ \bar{E}_i = \bar{E}_0 = 0 \end{aligned}$$

Caso 1: Corto circuito fra una fase e terra

Si consideri un corto circuito fra una fase (ad esempio fase 1 in Fig. 47) e la terra. Le condizioni di guasto impongono che:

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = 0 \\ \bar{I}_2 = \bar{I}_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{V}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\bar{V}_o + \bar{V}_d + \bar{V}_i) = 0 \Rightarrow (\bar{V}_o + \bar{V}_d + \bar{V}_i) = 0 \\ \bar{I}_o = \bar{I}_d = \bar{I}_i = \frac{\bar{I}_1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Tali condizioni sono soddisfatte collegando in serie le tre reti di sequenza (Fig. 48).

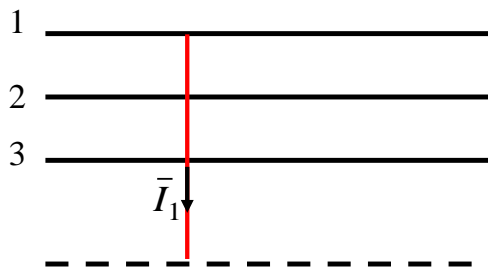


Fig. 47 – Cortocircuito monofase a terra

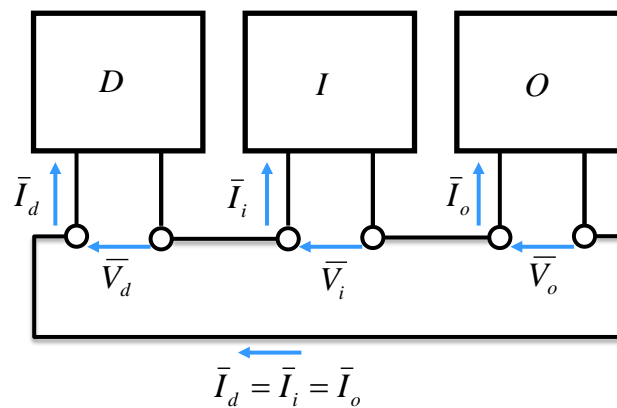


Fig. 48 – Collegamento delle reti monofase di sequenza per il cortocircuito monofase a terra

Caso 2: Corto circuito fra due fasi

Si consideri un corto circuito fra due fasi (ad esempio fasi 2 e 3 in Fig. 49).

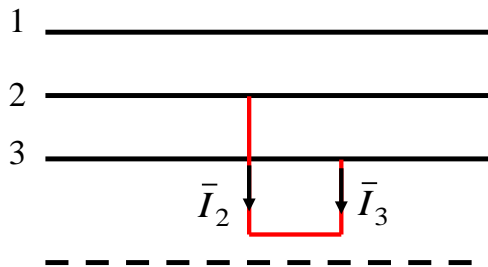


Fig. 49 - Cortocircuito fra fase e fase

Le condizioni di guasto impongono che:



$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{V}_2 = \bar{V}_3 \\ \bar{I}_1 = 0 \\ \bar{I}_2 = -\bar{I}_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{3}}(\bar{V}_o + \alpha^2 \bar{V}_d + \alpha \bar{V}_i) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\bar{V}_o + \alpha \bar{V}_d + \alpha^2 \bar{V}_i) \Rightarrow (\alpha^2 - \alpha) \bar{V}_d = (\alpha^2 - \alpha) \bar{V}_i \\ \bar{I}_d = \frac{1}{\sqrt{3}}(\bar{I}_1 + \alpha \bar{I}_2 + \alpha^2 \bar{I}_3) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\bar{I}_1 + \alpha \bar{I}_2 - \alpha^2 \bar{I}_2) \\ \bar{I}_i = \frac{1}{\sqrt{3}}(\bar{I}_1 + \alpha^2 \bar{I}_2 + \alpha \bar{I}_3) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\bar{I}_1 + \alpha^2 \bar{I}_2 - \alpha \bar{I}_2) \\ \bar{I}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\bar{I}_o + \bar{I}_d + \bar{I}_i) = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bar{V}_d = \bar{V}_i \\ \bar{I}_d + \bar{I}_i = 0 \\ \bar{I}_o = 0 \end{array} \right.$$

Tali condizioni sono soddisfatte collegando in parallelo le due reti di sequenza diretta e inversa e lasciando aperta quella omopolare (Fig. 50).

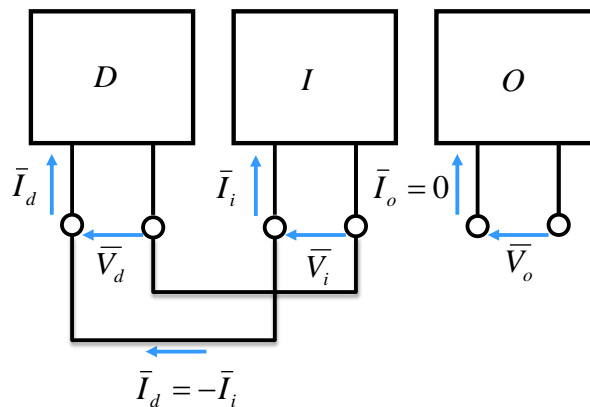


Fig. 50 - Collegamento delle reti monofase di sequenza per il cortocircito fra due fasi

Caso 3: Corto circuito fra due fasi e terra

Si consideri un corto circuito fra due fasi e la terra (ad esempio fasi 2 e 3 in Fig. 51).

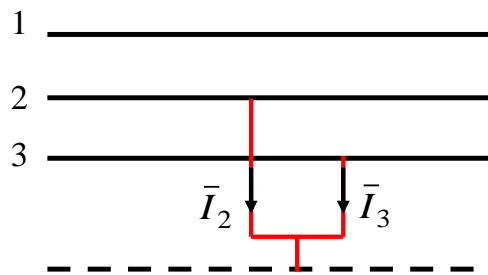


Fig. 51 - Cortocircito fra fase - fase e terra

Le condizioni di guasto impongono che:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{V}_2 = \bar{V}_3 = 0 \\ \bar{I}_1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bar{V}_o = \bar{V}_d = \bar{V}_i = \frac{\bar{V}_1}{\sqrt{3}} \\ \bar{I}_o + \bar{I}_d + \bar{I}_i = 0 \end{array} \right.$$

Tali condizioni sono soddisfatte collegando in parallelo le tre reti di sequenza (Fig. 52).

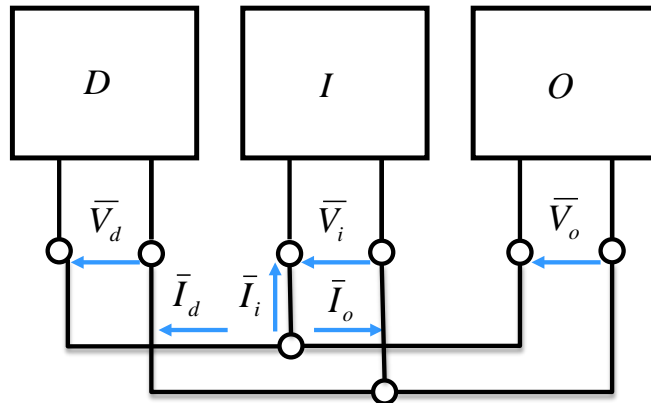


Fig. 52 - Collegamento delle reti monofase di sequenza per il cortocircuito fra due fasi e la terra

Caso 4: Corto circuito trifase

Si consideri un corto circuito fra le tre fasi (Fig. 53).

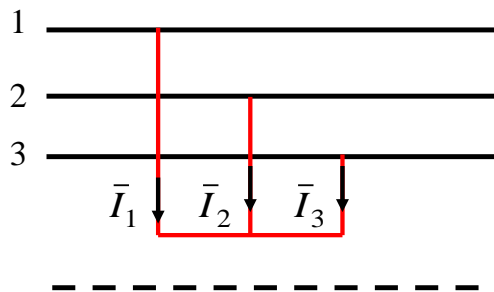


Fig. 53 - Cortocircuito trifase

Le condizioni di guasto impongono che:

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = \bar{V}_2 = \bar{V}_3 \\ \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{V}_d = \bar{V}_i = 0 \\ \bar{I}_o = 0 \end{cases}$$

Tali condizioni sono soddisfatte cortocircuitando le reti di sequenza diretta e inversa e lasciando aperta la rete di sequenza omopolare (Fig. 54).

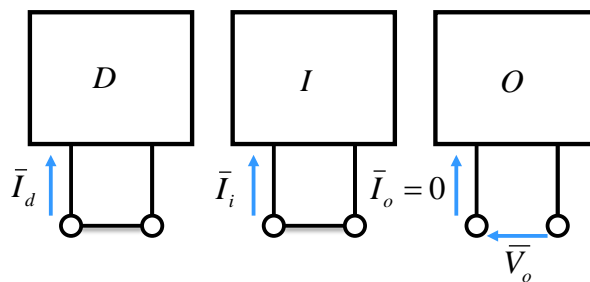


Fig. 54 - Collegamento delle reti monofase di sequenza per il cortocircuito trifase

Caso 5: Corto circuito trifase a terra

Si consideri un corto circuito fra le tre fasi e la terra (Fig. 55).

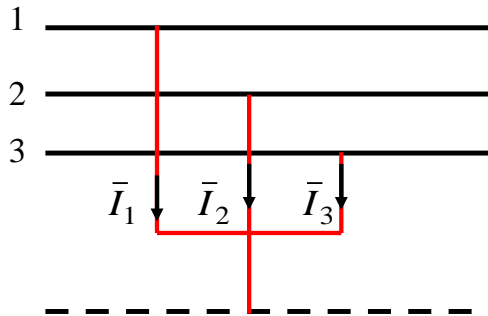


Fig. 55 - Cortocircuito trifase a terra

Le condizioni di guasto impongono che:

$$\bar{V}_1 = \bar{V}_2 = \bar{V}_3 = 0 \Rightarrow \bar{V}_d = \bar{V}_i = \bar{V}_o = 0$$

Tali condizioni sono soddisfatte cortocircuitando le tre reti di sequenza (Fig. 56).

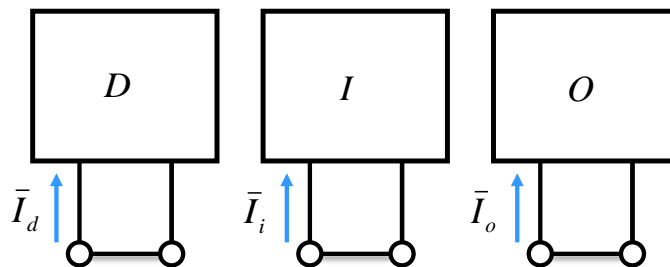


Fig. 56 - Collegamento delle reti monofase di sequenza per il cortocircuito trifase a terra

Riassumendo, il cortocircuito tra fase e terra corrisponde alla serie delle tre reti di sequenza; il guasto tra due fasi corrisponde al parallelo dei bipoli di sequenza diretta ed inversa mentre la rete di sequenza omopolare è aperta ed isolata; nel cortocircuito tra le tre fasi senza il collegamento a terra la rete di sequenza omopolare è aperta mentre le reti di sequenza diretta ed inversa sono cortocircuitate, ed infine il cortocircuito tra le tre fasi e terra, corrisponde alle tre reti monofase singolarmente cortocircuitate.

Ulteriori vincoli sono introdotti dal tipo di sistema trifase. Ad esempio, l'assenza del neutro impone che la somma delle correnti di linea sia uguale a zero (la terna è pura) e questo implica che la componente omopolare di tale terna è nulla.

Determinate le reti di sequenza (utilizzando la trasformata di Fortescue diretta) e collegate tali reti in modo da rispettare i vincoli sopra citati, si può procedere all'analisi circuitale (di circuiti monofase e non trifase) e ricavare le componenti simmetriche di tutte le correnti e tensioni nelle varie sezioni della rete trifase. Si può quindi risalire alle terne originarie applicando la trasformata di Fortescue inversa.

### Esempio

Consideriamo il sistema trifase riportato in Fig. 57. Con la notazione  $\bar{I}_1$  indichiamo la terna di correnti nelle tre fasi, in corrispondenza alla sezione 1, cioè:

$$\bar{I}_1 = \begin{bmatrix} \bar{I}_{1A} \\ \bar{I}_{1B} \\ \bar{I}_{1C} \end{bmatrix}$$

e così anche per  $\bar{I}_2, \bar{V}_1, \bar{V}_x$ , e  $\bar{I}$ .

Il sistema è affetto da un corto circuito fra le fasi B e C. Le condizioni di guasto impongono che:

$$\begin{cases} \bar{V}_B = \bar{V}_C \\ \bar{I}_A = 0 \\ \bar{I}_B = -\bar{I}_C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{V}_d = \bar{V}_i \\ \bar{I}_d + \bar{I}_i = 0 \\ \bar{I}_o = 0 \end{cases}$$

che, come visto precedentemente, sono soddisfatte collegando in parallelo le due reti di sequenza diretta e inversa e lasciando aperta quella omopolare (vedi Fig. 50).

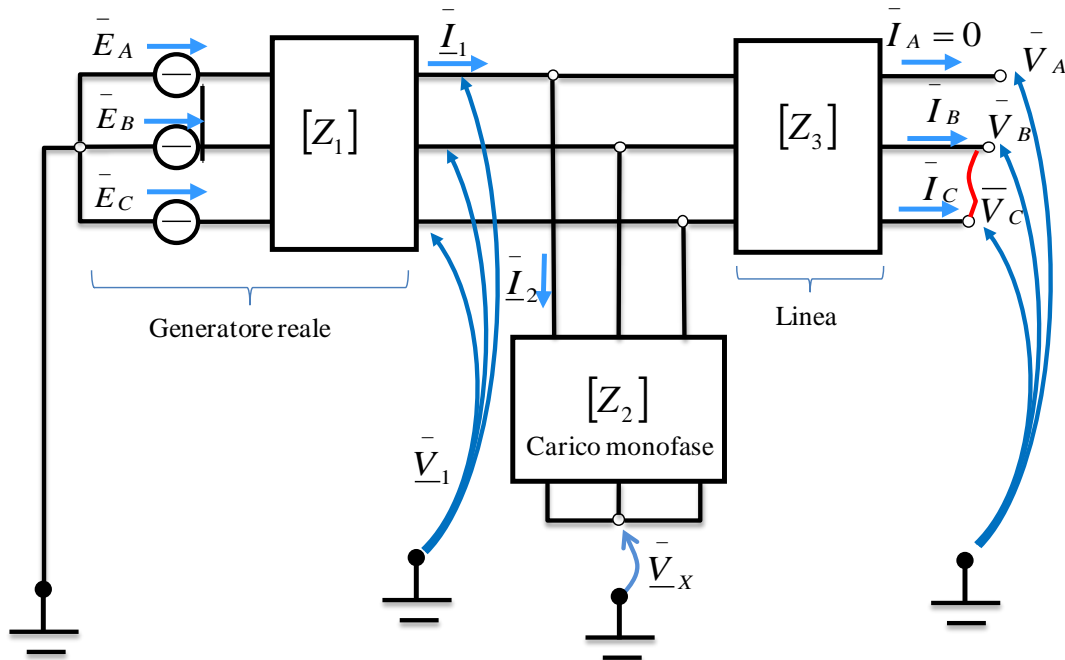


Fig. 57 – Esempio di sistema trifase affetto da cortocircuito fra due fasi

Supponiamo inoltre che la terna delle tensioni di alimentazione del generatore costituiscano un sistema simmetrico diretto. Questo implica che:

$$\bar{E}_i = \bar{E}_o = 0$$

Inoltre, poiché il carico  $[Z_2]$  è un carico monofase con neutro isolato, si dovranno imporre le ulteriori condizioni:

$$\bar{V}_x = \begin{bmatrix} \bar{V}_x \\ \bar{V}_x \\ \bar{V}_x \end{bmatrix}$$

$$\bar{I}_{2A} + \bar{I}_{2B} + \bar{I}_{2C} = 0$$

che, in termini di componenti di sequenza diventa:

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_{x0} \\ \bar{V}_{xd} \\ \bar{V}_{xi} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_x \\ \bar{V}_x \\ \bar{V}_x \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \bar{V}_{x0} = \sqrt{3}\bar{V}_x \\ \bar{V}_{xd} = 0 \\ \bar{V}_{xi} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_{20} \\ \bar{I}_{2d} \\ \bar{I}_{2i} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_{2A} \\ \bar{I}_{2B} \\ \bar{I}_{2C} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \bar{I}_{20} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\bar{I}_{2A} + \bar{I}_{2B} + \bar{I}_{2C}) = 0 \\ \bar{I}_{2d} \neq 0 \\ \bar{I}_{2i} \neq 0 \end{cases}$$

Le equazioni del circuito sistema trifase sono:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \bar{E}_A \\ \bar{E}_B \\ \bar{E}_C \end{bmatrix} = [\dot{Z}_1] \begin{bmatrix} \bar{I}_{1A} \\ \bar{I}_{1B} \\ \bar{I}_{1C} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{V}_{1A} \\ \bar{V}_{1B} \\ \bar{V}_{1C} \end{bmatrix} & (1) \\ \bar{I}_1 = \bar{I}_2 + \bar{I} & (2) \\ \bar{V}_1 = [\dot{Z}_2] \bar{I}_2 + \bar{V}_x & (3) \\ \bar{V}_1 = [\dot{Z}_3] \bar{I} + \bar{V} & (4) \end{cases}$$

Effettuando le trasformazioni di Fortescue delle precedenti equazioni si ottiene:

$$\text{Equazione (1): } \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{E}_d \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Z}_{1o} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{Z}_{1d} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{Z}_{1i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_{1o} \\ \bar{I}_{1d} \\ \bar{I}_{1i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{V}_{1o} \\ \bar{V}_{1d} \\ \bar{V}_{1i} \end{bmatrix}$$

$$\text{Equazione (2): } \begin{bmatrix} \bar{I}_{1o} \\ \bar{I}_{1d} \\ \bar{I}_{1i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{I}_{2o} \\ \bar{I}_{2d} \\ \bar{I}_{2i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{I}_o \\ \bar{I}_d \\ \bar{I}_i \end{bmatrix}$$

$$\text{Equazione (3): } \begin{bmatrix} \bar{V}_{1o} \\ \bar{V}_{1d} \\ \bar{V}_{1i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Z}_{2o} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{Z}_{2d} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{Z}_{2i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_{2o} \\ \bar{I}_{2d} \\ \bar{I}_{2i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{V}_{xo} \\ \bar{V}_{xd} \\ \bar{V}_{xi} \end{bmatrix}$$

$$\text{Equazione (4): } \begin{bmatrix} \bar{V}_{1o} \\ \bar{V}_{1d} \\ \bar{V}_{1i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Z}_{3o} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{Z}_{3d} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{Z}_{3i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_o \\ \bar{I}_d \\ \bar{I}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{V}_o \\ \bar{V}_d \\ \bar{V}_i \end{bmatrix}$$

Si può notare che la natura diagonale delle matrici rende tensioni e correnti di pari sequenza indipendenti da quelli delle altre sequenze. Si possono quindi riscrivere le equazioni precedenti, unitamente alle condizioni al contorno, per ciascuna sequenza.

Sequenza omopolare

$$\begin{cases} 0 = \dot{Z}_{1o} \bar{I}_{1o} + \bar{V}_{1o} \\ \bar{I}_{1o} = \bar{I}_{2o} + \bar{I}_o \\ \bar{V}_{1o} = \dot{Z}_{2o} \bar{I}_{2o} + \bar{V}_{xo} \\ \bar{V}_{1o} = \dot{Z}_{3o} \bar{I}_o + \bar{V}_o \\ \bar{I}_o = 0 \\ \bar{I}_{2o} = 0 \end{cases}$$

Le precedenti equazioni corrispondono alla rete monofase di sequenza omopolare di Fig. 58.

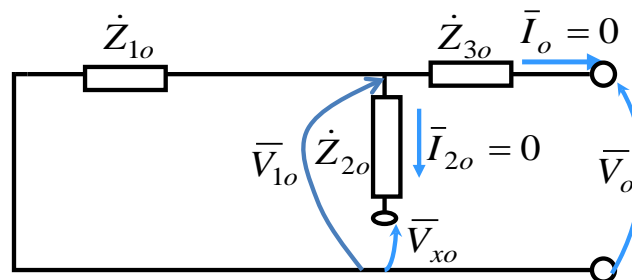


Fig. 58 – Rete di sequenza omopolare del circuito trifase di Fig. 57

Le impedenze  $\dot{Z}_{2o}$  e  $\dot{Z}_{3o}$  rimangono appese per rispettare i vincoli  $\bar{I}_{2o} = 0$  e  $\bar{I}_o = 0$ .

### Sequenza diretta

$$\begin{cases} \bar{E}_d = \dot{Z}_{1d}\bar{I}_{1d} + \bar{V}_{1d} \\ \bar{I}_{1d} = \bar{I}_{2d} + \bar{I}_d \\ \bar{V}_{1d} = \dot{Z}_{2d}\bar{I}_{2d} + \bar{V}_{xd} \\ \bar{V}_{1d} = \dot{Z}_{3d}\bar{I}_d + \bar{V}_d \\ \bar{V}_{xd} = 0 \end{cases}$$

Le precedenti equazioni corrispondono alla rete monofase di sequenza diretta di Fig. 59.

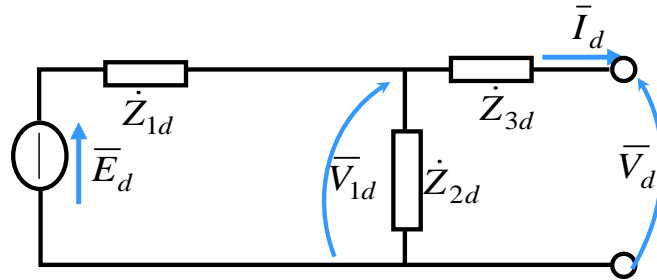


Fig. 59 – Rete di sequenza diretta del circuito trifase di Fig. 57

### Sequenza inversa

$$\begin{cases} 0 = \dot{Z}_{1i}\bar{I}_{1i} + \bar{V}_{1i} \\ \bar{I}_{1i} = \bar{I}_{2i} + \bar{I}_i \\ \bar{V}_{1i} = \dot{Z}_{2i}\bar{I}_{2i} + \bar{V}_{xi} \\ \bar{V}_{1i} = \dot{Z}_{3i}\bar{I}_i + \bar{V}_i \\ \bar{V}_{xi} = 0 \end{cases}$$

Le precedenti equazioni corrispondono alla rete monofase di sequenza inversa di Fig. 60.

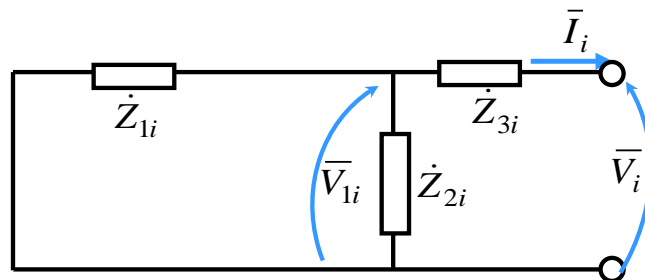


Fig. 60 – Rete di sequenza inversa del circuito trifase di Fig. 57

Imponendo le condizioni di guasto si ricavano le regole per la connessione delle tre reti monofase di sequenza. In particolare, nel caso di guasto fra due fasi si è già mostrato che le condizioni di guasto impongono di collegare in parallelo le due reti di sequenza diretta e inversa, lasciando aperta quella omopolare. Il circuito monofase risultante è riportato in Fig. 61.

La rete omopolare è inerte e non fornisce alcun contributo in tensione e in corrente.

Nota: Il fatto che sia  $\bar{I}_{2o} = 0$  e  $\bar{I}_o = 0$  ( e si può verificare che ogni altra componente omopolare di corrente è nulla) dipende dal fatto che non c'è neutro.

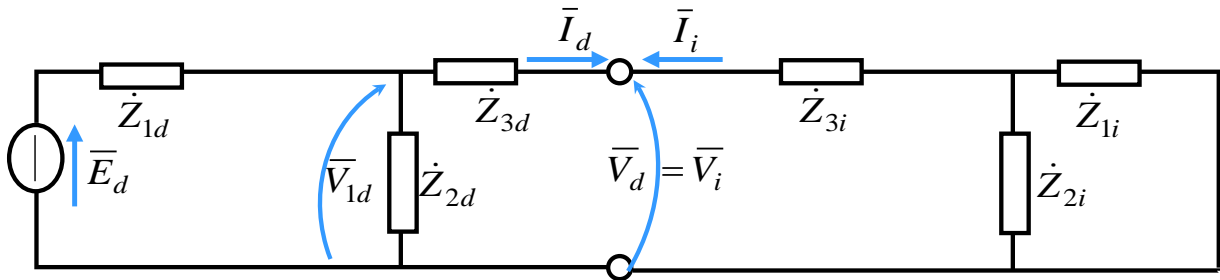


Fig. 61 – Circuito monofase equivalente al circuito trifase in Fig. 57.

L'analisi del circuito monofase in Fig. 61 può essere condotta con i consueti metodi. Una volta determinate le tensioni e le correnti nel circuito monofase, sono note le componenti di sequenza delle tensioni e correnti nel circuito trifase di partenza. Per risalire a queste ultime si applica la trasformata inversa di Fortescue.

Ad esempio, nella sezione di guasto sarà:

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_A \\ \bar{I}_B \\ \bar{I}_C \end{bmatrix} = [F]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{I}_d \\ -\bar{I}_d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_A \\ \bar{V}_B \\ \bar{V}_C \end{bmatrix} = [F]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{V}_d \\ \bar{V}_d \end{bmatrix}$$

E così via per tutte le terne di tensioni e correnti nel circuito di partenza.

Nota: Vi sono dei casi in cui l'impiego della trasformata di Fortescue è addirittura controproducente. Un esempio tipico è quello di Fig. 62.

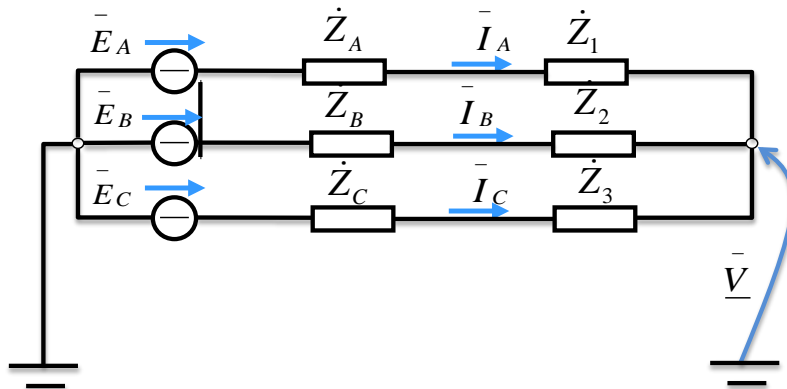


Fig. 62 – Sistema trifase squilibrato

Come visto precedentemente, l'analisi del circuito di Fig. 62 è banale applicando i consueti metodi di analisi. L'utilizzo della trasformata di Fortescue impone le equazioni del circuito, che nel caso in esame sono:

$$\bar{E} = [\dot{Z}]\bar{I} + \bar{V} \Rightarrow [F]\bar{E} = [F][\dot{Z}][F]^{-1}[F]\bar{I} = [\dot{Z}'] [F]\bar{I}$$

Essendo la matrice  $[\dot{Z}]$  per il circuito in esame una matrice diagonale:

$$[\dot{Z}] = \begin{bmatrix} (\dot{Z}_A + \dot{Z}_1) & & \\ & (\dot{Z}_B + \dot{Z}_2) & \\ & & (\dot{Z}_C + \dot{Z}_3) \end{bmatrix}$$

la matrice  $[\dot{Z}'] = [F][\dot{Z}][F]^{-1}$  diventa una matrice piena portando ad un procedimento molto lungo. Sviluppando l'analisi con la teoria delle componenti simmetriche troveremo comunque:  
 $\bar{I}_o = 0$ ;  $\bar{V}_o = \sqrt{3}\bar{V}$ ;  $\bar{V}_d = \bar{V}_i = 0$ ;  $\bar{E}_d = \sqrt{3}\bar{E}_A$ .

### Equilibratura di un carico monofase

L'inserzione di carichi monofase in sistemi trifase può portare, se i carichi non sono opportunamente collegati sulle tre fasi, ad uno squilibrio delle correnti. Tale squilibrio può essere compensato, procedendo ad una equilibratura dei carichi monofase.

Si supponga di avere una terna di generatori che forniscono una terna simmetrica diretta di tensioni, e supponiamo di collegare un carico monofase come in Fig. 63.

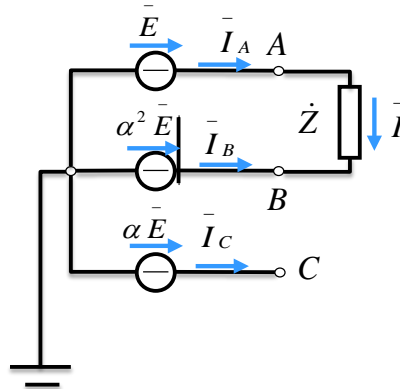


Fig. 63 – Sistema trifase squilibrato

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}(1 - \alpha^2)}{\dot{Z}}$$

La terna delle correnti di linea è squilibrata:

$$\begin{cases} \bar{I}_A = \bar{I} \\ \bar{I}_B = -\bar{I} \\ \bar{I}_C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \bar{I}_o \\ \bar{I}_d \\ \bar{I}_i \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I} \\ -\bar{I} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \bar{I}_o = 0 \\ \bar{I}_d = \frac{1}{\sqrt{3}}(1 - \alpha)\bar{I} \\ \bar{I}_i = \frac{1}{\sqrt{3}}(1 - \alpha^2)\bar{I} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{I}_d = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( 1 + \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \bar{I} = \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2} \right) \bar{I} \\ \bar{I}_i = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( 1 + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \bar{I} = \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2} \right) \bar{I} \end{cases}$$

$\bar{I}_d$  e  $\bar{I}_i$  hanno lo stesso modulo di  $\bar{I}$ . La rappresentazione fasoriale è quella di Fig. 64.

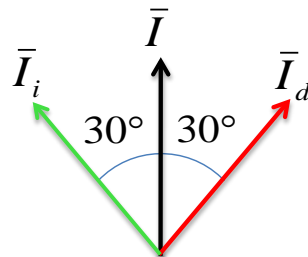


Fig. 64 - Diagramma fasoriale della corrente I e delle sue componenti simmetriche



Si vuole aggiungere un carico non dissipativo in modo tale che la terna delle correnti di linea sia una terna equilibrata. Per fare ciò, inseriamo tre impedenze collegate, ad esempio, a stella, come in Fig. 65.

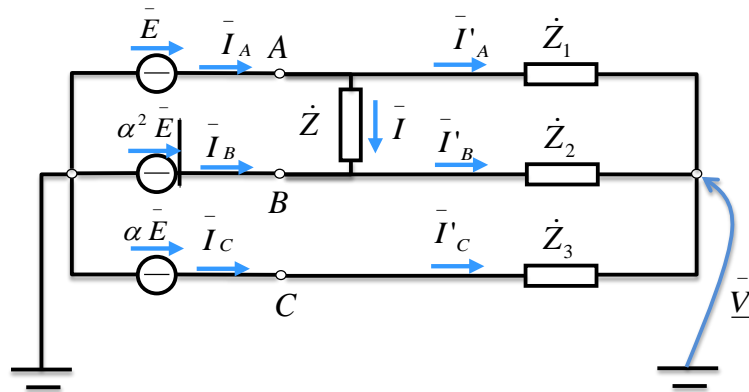


Fig. 65 – Equilibratura di un carico monofase

Se vogliamo che  $\bar{I}_A, \bar{I}_B$ , e  $\bar{I}_C$  costituiscano una terna equilibrata,  $\bar{I}'_A, \bar{I}'_B$ , e  $\bar{I}'_C$  devono essere tali da compensare la componente di sequenza inversa introdotta da  $\dot{Z}$ , ossia  $\dot{Z}_1, \dot{Z}_2, \dot{Z}_3$  dovranno assorbire una terna:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\bar{I}_i \end{bmatrix}$$

Ciò significa che  $\bar{I}'_A, \bar{I}'_B$ , e  $\bar{I}'_C$  saranno:

$$\begin{bmatrix} \bar{I}'_A \\ \bar{I}'_B \\ \bar{I}'_C \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\bar{I}_i \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \bar{I}'_A = -\frac{1}{\sqrt{3}} \bar{I}_i \\ \bar{I}'_B = -\frac{1}{\sqrt{3}} \alpha \bar{I}_i \\ \bar{I}'_C = -\frac{1}{\sqrt{3}} \alpha^2 \bar{I}_i \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \bar{I}'_A \\ \bar{I}'_B \\ \bar{I}'_C \end{bmatrix} = -\frac{\bar{I}_i}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{bmatrix}$$

Scriviamo le equazioni alle maglie:

$$\begin{cases} \bar{E} - \dot{Z}_1 \bar{I}'_A = \bar{V} \\ \alpha^2 \bar{E} - \dot{Z}_2 \bar{I}'_B = \bar{V} \\ \alpha \bar{E} - \dot{Z}_3 \bar{I}'_C = \bar{V} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{E} + \dot{Z}_1 \frac{\bar{I}_i}{\sqrt{3}} = \bar{V} \\ \alpha^2 \bar{E} + \dot{Z}_2 \alpha \frac{\bar{I}_i}{\sqrt{3}} = \bar{V} \\ \alpha \bar{E} - \dot{Z}_3 \alpha^2 \frac{\bar{I}_i}{\sqrt{3}} = \bar{V} \end{cases} \Rightarrow \text{sostituendo la prima equazione nelle altre due si ottiene:}$$

$$\begin{cases} \alpha^2 \bar{E} + \dot{Z}_2 \alpha \frac{\bar{I}_i}{\sqrt{3}} = \bar{E} + \dot{Z}_1 \frac{\bar{I}_i}{\sqrt{3}} \\ \alpha \bar{E} - \dot{Z}_3 \alpha^2 \frac{\bar{I}_i}{\sqrt{3}} = \bar{E} + \dot{Z}_1 \frac{\bar{I}_i}{\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\alpha^2 - 1) \bar{E} = (\dot{Z}_1 - \alpha \dot{Z}_2) \frac{\bar{I}_i}{\sqrt{3}} \\ (\alpha - 1) \bar{E} = (\dot{Z}_1 - \alpha^2 \dot{Z}_3) \frac{\bar{I}_i}{\sqrt{3}} \end{cases} \quad (5)$$

Dividendo membro a membro:

$$\begin{aligned} (\alpha + 1) &= \frac{(\dot{Z}_1 - \alpha \dot{Z}_2)}{(\dot{Z}_1 - \alpha^2 \dot{Z}_3)} \Rightarrow -\alpha^2 (\dot{Z}_1 - \alpha^2 \dot{Z}_3) = (\dot{Z}_1 - \alpha \dot{Z}_2) \Rightarrow -\alpha^2 \dot{Z}_1 + \alpha \dot{Z}_3 - \dot{Z}_1 + \alpha \dot{Z}_2 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \alpha \dot{Z}_1 + \alpha \dot{Z}_2 + \alpha \dot{Z}_3 = 0 \Rightarrow \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3 = 0 \end{aligned}$$

La soluzione non è unica ma, poiché vogliamo che i carichi aggiuntivi non dissipino potenza attiva, tutti gli elementi dovranno essere puramente reattivi. Allora sarà:

$$\dot{Z}_1 = jX_1; \dot{Z}_2 = jX_2; \dot{Z}_3 = jX_3 \text{ e } X_1 + X_2 + X_3 = 0 \Rightarrow X_1 = -X_2 - X_3$$

Occorre soddisfare una delle equazioni (5), in quanto l'altra è già soddisfatta attraverso il vincolo equivalente  $\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3 = 0$ .

Ad esempio, dalla prima delle (5) si ha:

$$\begin{aligned}(\alpha^2 - 1)\bar{E} &= (-jX_2 - jX_3 - j\alpha X_2) \frac{\bar{I}_i}{\sqrt{3}} = -j[X_2(1 + \alpha) + X_3] \frac{1}{\sqrt{3}}(1 - \alpha^2)\bar{I} \\ &= -j[-\alpha^2 X_2 + X_3] \frac{1}{\sqrt{3}}(1 - \alpha^2) \frac{1}{\sqrt{3}}(1 - \alpha^2) \frac{\bar{E}}{Z} = -j[-\alpha^2 X_2 + X_3] \frac{1}{3}(1 - \alpha^2)^2 \frac{\bar{E}}{Z} \\ \Rightarrow (\alpha^2 - 1)\bar{E} &= -j[-\alpha^2 X_2 + X_3] \frac{1}{3}(1 - \alpha^2)^2 \frac{\bar{E}}{Z} \Rightarrow 1 = j[X_3 - \alpha^2 X_2] \frac{1}{3}(1 - \alpha^2) \frac{1}{Z} \Rightarrow 3\dot{Z} \\ &= j[X_3 - \alpha^2 X_2](1 - \alpha^2)\end{aligned}$$

Ponendo  $\dot{Z} = R + jX$  e sviluppando la precedente equazione si ha:

$$\begin{aligned}3(R + jX) &= j \left[ X_3 + \left( \frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) X_2 \right] \left( 1 + \frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = j \left[ \left( X_3 + \frac{X_2}{2} \right) + j \frac{\sqrt{3}}{2} X_2 \right] \left( \frac{3}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= j \left\{ \left[ \frac{3}{2} \left( X_3 + \frac{X_2}{2} \right) - \frac{3}{4} X_2 \right] + j \left[ \frac{3\sqrt{3}}{4} X_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \left( X_3 + \frac{X_2}{2} \right) \right] \right\} \\ &= j \left\{ \frac{3}{2} X_3 + j \frac{\sqrt{3}}{2} \left[ \frac{3}{2} X_2 + X_3 + \frac{X_2}{2} \right] \right\} = j \left\{ \frac{3}{2} X_3 + j \frac{\sqrt{3}}{2} (X_3 + 2X_2) \right\} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} (X_3 + 2X_2) + j \frac{3}{2} X_3\end{aligned}$$

Da cui

$$\begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{2} (X_3 + 2X_2) = 3R \\ \frac{3}{2} X_3 = 3X \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{3}X - \sqrt{3}X_2 = 3R \\ X_3 = 2X \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_2 = -(\sqrt{3}R + X) \\ X_3 = 2X \\ X_1 = -X_2 - X_3 = \sqrt{3}R + X - 2X \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_1 = \sqrt{3}R - X \\ X_2 = -\sqrt{3}R - X \\ X_3 = 2X \end{cases}$$

In questo modo le correnti di linea sono:

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_A \\ \bar{I}_B \\ \bar{I}_C \end{bmatrix} = [F]^{-1} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{I}_d \\ \bar{I}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\bar{I}_i \end{bmatrix} \right) = [F]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{I}_d \\ 0 \end{bmatrix}$$

ossia proprio una terna diretta.

Note:

- Il tripolo aggiuntivo non dissipa
- E' possibile (il tripolo lo fa) assorbire una terna inversa pura.

### Rifasamento di un carico trifase

Il rifasamento di un carico trifase si realizza, analogamente a quanto fatto per i carichi monofase, inserendo in parallelo al carico trifase una batteria di condensatori. I vantaggi del rifasamento sono:

- La riduzione della potenza dissipata in linea  $P_d$ . Tale potenza, come noto, è proporzionale al quadrato del valore efficace delle correnti di linea  $I: P_d = 3R_L I^2$ , dove  $R_L$  è la resistenza di ciascun filo di linea. Infatti, con il rifasamento diminuisce la corrente in linea (sempre che i condensatori siano posti all'arrivo, in parallelo al carico e non alla partenza della linea);
- La riduzione della caduta di tensione in linea;

- La riduzione della potenza apparente del carico equivalente (carico + batteria).

Diminuendo la corrente si può progettare la linea con una sezione minore; inoltre aumenta il rendimento della linea.

Se l'utenza, rifasando, richiede minore potenza apparente, l'ente che eroga l'energia può soddisfare più utenze, rispetto a quando non si rifasa.

Si noti che la potenza attiva dell'utenza non viene modificata dalla presenza dei condensatori, ritenendo costante la tensione prima e dopo il rifasamento.

Al fine di mantenere la simmetria ed equilibrio del sistema trifase, la batteria di condensatori dovrà caricare in ugual misura le tre fasi. A tal fine occorre utilizzare tre condensatori di uguale capacità, collegati o a stella o a triangolo, come mostrato in Fig. 66.

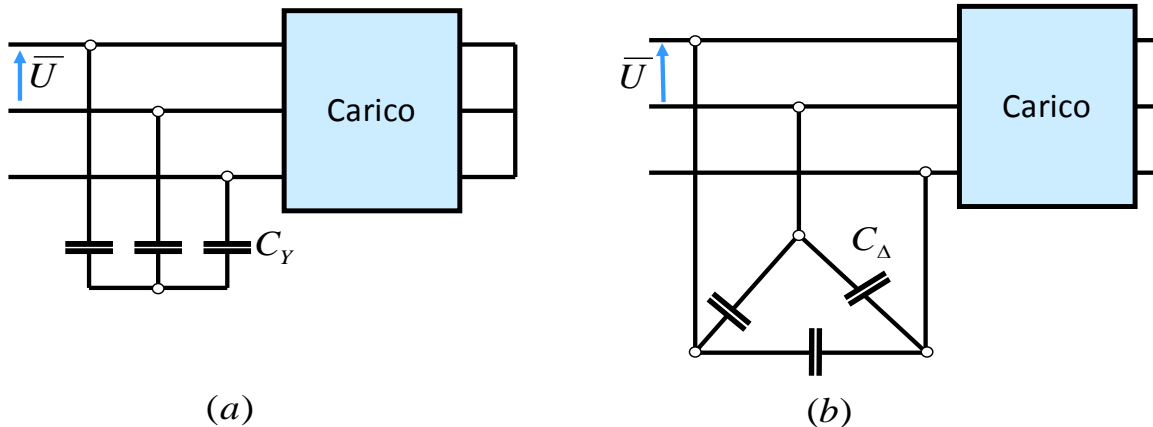


Fig. 66 – Rifasamento di un carico trifase con collegamento dei condensatori: (a) a stella e (b) a triangolo.

Siano  $P$  e  $Q$  le potenze attiva e reattiva del carico, e sia  $\cos\phi$  il fattore di potenza del carico. Supponiamo di voler rifasare ad un fattore di potenza  $\cos\phi' > \cos\phi$ . Questo significa che il carico equivalente (carico + batteria di condensatori) deve scambiare con il generatore una ridotta potenza reattiva pari a  $P \tan\phi'$ .

Per il teorema di Boucherot sarà:

$$P = P'$$

$$Q_C = Q - Q' = P (\tan\phi - \tan\phi')$$

dove  $Q_C$  è la potenza reattiva della batteria di condensatori. Poiché la reattanza capacitiva di un condensatore è:

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

sarà:

$$Q_C = 3 \frac{V_{fase}^2}{X_C} = 3\omega C V_{fase}^2$$

A seconda del collegamento dei condensatori possiamo ottenere il valore delle capacità del banco di condensatori.

In particolare, se i condensatori sono collegati a stella sarà:

$$V_{fase} = E = \frac{U}{\sqrt{3}}$$

$$Q_C = 3\omega C_Y E^2 = 3\omega C_Y \frac{U^2}{3} = \omega C_Y U^2$$

$$C_Y = \frac{P (\tan\phi - \tan\phi')}{\omega U^2}$$

Se i condensatori sono collegati a triangolo sarà:

$$V_{fase} = U$$

$$Q_C = 3\omega C_\Delta U^2$$

$$C_\Delta = \frac{P (\tan\phi - \tan\phi')}{3\omega U^2}$$

Dalle precedenti relazione si evince che:

$$C_{\Delta} = \frac{C_Y}{3}$$

Con il collegamento a triangolo la capacità di ogni fase è ridotta a 1/3 del valore a stella.

La scelta del tipo di collegamento, tra quello a stella e quello a triangolo, è legata sia al costo della capacità, che aumenta con il valore della capacità stessa, a parità di  $Q_c$ , sia al costo per l'isolamento, che aumenta con la tensione alla quale sono sottoposti i condensatori. Per questo motivo, con medie e alte tensioni si opta per il collegamento a stella, essendo la tensione stellata ridotta di 1,732 volte rispetto a quella concatenata che agisce con collegamento a triangolo. Per basse tensioni, si opta invece per il collegamento a triangolo, privilegiando il risparmio in termini di minore valore di capacità.