

L'ANALISI DIMENSIONALE APPLICATA ALLE TURBOMACCHINE

L'analisi dimensionale si basa su due principi fondamentali:

1. Il principio di omogeneità dimensionale, secondo il quale l'analisi dimensionale può essere applicata a qualsiasi fenomeno fisico descritto da una relazione dimensionale omogenea;
2. Il principio di riduzione delle variabili, mediante il quale è possibile ridurre il numero di variabili indipendenti con le quali un fenomeno fisico è descritto. Tale principio viene soddisfatto applicando il "Teorema di Buckingham" altrimenti conosciuto come "Teorema del Pi-greco", che afferma che:

"Qualunque legge fisica può essere espressa mediante un relazione tra una serie completa di gruppi adimensionali. Il numero di gruppi adimensionali che sono necessari sono pari al numero di grandezze influenti il fenomeno diminuite del numero di grandezze fondamentali necessarie per rappresentarle."

La serie si dice completa se:

- ciascun gruppo compare almeno una volta nella serie;
- i gruppi debbono essere indipendenti tra di loro, ossia nessun gruppo può essere espresso mediante prodotto di potenze degli altri gruppi.

Nel proseguo della trattazione verrà descritta in maniera distinta l'applicazione alle macchine a flusso incomprimibile e comprimibile.

Flusso incomprimibile

Si considerino delle turbomacchine (ad esempio operatrici) in cui il fluido evolvente possa considerarsi, durante la sua evoluzione, incomprimibile ($\rho = \text{cost.}$). Le prestazioni delle macchine a flusso incomprimibile (gH, η, P) vengono espresse in funzione dei parametri geometrici e delle condizioni di funzionamento della macchina.

Se ad esempio ci si pone il problema di ricavare sperimentalmente le prestazioni di una pompa, e di voler ricavare i parametri da cui dipende la prevalenza della macchina, occorre disporre di un impianto si prova del tipo schematizzato in figura 1.

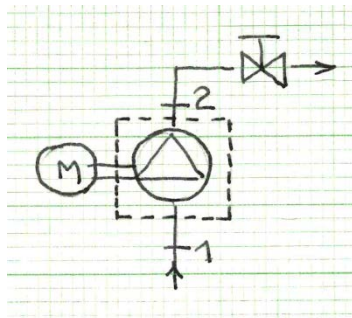


Figura 1 Impianto sperimentale di prova per una macchina operatrice

In questo impianto possono essere variate tutte le condizioni di funzionamento (velocità di rotazione, portata volumetrica e geometria della pompa), determinando per ciascuna condizione la prevalenza. In tal modo è possibile esprimere, anche semplicemente attraverso una relazione funzionale, il legame fra le varie grandezze che influenzano la prevalenza.

Questa fase assume una particolare importanza in quanto occorre soddisfare il criterio di completezza. E' infatti importante individuare tutte le variabili indipendenti che influenzano la prevalenza senza trascurarne alcuna.

La prevalenza pertanto sarà dipendente oltre che dalla portata e velocità di rotazione, che rappresentano le variabili cui riferirsi per il controllo dell'impianto, anche dalle variabili che riguardano le caratteristiche fisiche del fluido operativo e la geometria della macchina. Per quanto concerne il fluido le variabili sono la densità ρ e la viscosità dinamica μ . Per la geometria si può individuare una lunghezza caratteristica (ad esempio il diametro D) a cui si rapportano tutte le altre dimensioni che identificano la forma della macchina (rappresentazione modulare). Le variabili che esprimono la dipendenza della prevalenza dalla geometria sono pertanto le seguenti: $D, l_1/D, l_2/D, \dots, l_i/D, \dots$, per cui si ottiene:

$$gH = f_1 \left(Q, n, \rho, \mu, D, \frac{l_1}{D}, \frac{l_2}{D}, \frac{l_i}{D}, \dots \right) \quad 1)$$

Relazioni simili si possono ottenere anche per il rendimento e la potenza.

$$\eta = f_2 \left(Q, n, \rho, \mu, D, \frac{l_1}{D}, \frac{l_2}{D}, \frac{l_i}{D}, \dots \right) \quad 2)$$

$$P = f_3 \left(Q, n, \rho, \mu, D, \frac{l_1}{D}, \frac{l_2}{D}, \frac{l_i}{D}, \dots \right) \quad 3)$$

Nelle relazioni funzionali 1)-3) sono presenti solo delle grandezze di carattere "meccanico", non essendo coinvolti fenomeni termici legati ad esempio alla comprimibilità o ad altri fenomeni in cui siano presenti flussi di calore.

Le considerazioni seguenti saranno limitate alla relazione 1) in quanto applicabili identicamente anche per le altre due.

La relazione 1) esprime il legame fra n grandezze o variabili indipendenti e deve rispondere al principio di omogeneità. Questo significa che l'ipotetica relazione (e di cui in genere non è possibile conoscere la forma analitica), deve raggruppare le variabili in modo che i due membri dell'equazione debbano avere la stessa dimensione. Dal punto di vista generale anche sotto il profilo formale il concetto presentato, può essere espresso, per n grandezze fisiche, nel modo seguente:

$$F(G_1, G_2, \dots, G_i, \dots, G_n) = 0 \quad 4)$$

che possono essere opportunamente ridotte applicando il principio di riduzione, ossia il teorema di Buckingham. Indicando con q il numero di grandezze fondamentali, con le quali descrivere le dimensioni delle n grandezze fisiche G_i che caratterizzano il fenomeno, è

possibile esprimere la 4) nella forma adimensionale mediante i prodotti indipendenti di dimensione nulla Π_i in numero pari ad $n-q$.

$$\Phi(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_i, \dots, \Pi_{n-q}) = 0 \quad 5)$$

L'applicazione del teorema di Buckingham è subordinata al fatto che siano note le dimensioni di tutte le grandezze G_i (siano esse variabili o costanti) che intervengono nel fenomeno fisico in esame.

Nel caso in esame di flusso incomprimibile, le variabili fisiche che descrivono il fenomeno fisico sono esclusivamente di tipo meccanico per cui le tre grandezze fondamentali $q=3$ sono:

- Massa $[M]$,
- Lunghezza $[L]$,
- Tempo $[T]$,

Per la costruzione dei gruppi adimensionali le 3 grandezze rappresentative delle di quelle fondamentali, scelte fra le n variabili indicate nella relazione 1), sono riassunte nella tabella 1

Grandezza fondamentale	Variabile	Dimensione
Lunghezza	d	$[L]$
Massa	ρ	$[ML^{-3}]$
Tempo	n	$[T^{-1}]$

Tabella 1 – Variabili considerate come rappresentative delle grandezze fondamentali.

La relazione 1) coinvolge sei grandezze dimensionali (non si considerano infatti i rapporti geometrici l_i/d perché di per se già adimensionali), pertanto si dovrà scrivere una relazione con $n-q=6-3=3$ parametri adimensionali. Per adimensionalizzare le grandezze rimanenti si devono annullare le loro dimensioni utilizzando le variabili individuate per rappresentare le grandezze fondamentali. Ad esempio la prevalenza espressa come gH ha dimensione $[L^2 T^{-2}]$, perciò per annullare le sue dimensioni si dovrà dividere per le grandezze rappresentative della lunghezza e del tempo che sono rispettivamente d ed n , ottenendo così un parametro adimensionale che prende il nome di coefficiente di pressione:

$$\psi = \frac{gH}{n^2 d^2}$$

La dimensioni della viscosità è $[ML^{-1}T^{-1}]$. Per annullare la massa, si divide la viscosità per la densità, ottenendo

$$\frac{\mu}{\rho} [L^{-2}T^{-1}]$$

A questo punto, per annullare il quadrato della lunghezza e il tempo, si divide ancora per il quadrato del diametro e per il numero di giri, ottenendo il seguente gruppo adimensionale:

$$\frac{\mu}{\rho d^2 n}$$

Ricordando che la velocità di trascinamento è dimensionalmente esprimibile (proporzionale) $u \propto nd$, si ottiene che il precedente gruppo adimensionale può essere scritto come

$$\frac{\mu}{\rho d (dn)} = \frac{\mu}{\rho d u}$$

che può essere invertito, ottenendo così il numero di Reynolds riferito alla velocità di trascinamento della macchina anziché alla velocità del flusso

$$Re = \frac{\rho du}{\mu}$$

Nella tabella 2 si elencano i gruppi adimensionali sopra calcolati, includendo i restanti gruppi mancanti, ottenuti procedendo con il medesimo criterio di annullamento successivo delle dimensioni delle altre variabili presenti nelle tre relazioni funzionali analizzate. Si fa notare che nell'elenco manca il rendimento perché per sua definizione è già adimensionale.

Grandezza	Parametro adimensionale	
Portata	Coefficiente di portata	$\varphi = \frac{Q}{nd^3} = \frac{Q}{nd \cdot d^2} = \frac{1}{u} \frac{Q}{d^2} = \frac{c}{u}$
Prevalenza	Coefficiente di pressione	$\psi = \frac{gH}{n^2 d^2} = \frac{gH}{u^2/2}$
Viscosità	Numero di Reynolds	$\frac{\mu}{\rho nd^2} \rightarrow Re = \frac{\rho nd^2}{\mu} = \frac{\rho ud}{\mu}$
Potenza	Potenza adimensionale	$\hat{P} = \frac{P}{\rho n^3 d^5} = \frac{\rho Q gH}{\eta \rho n^3 d^5} = \frac{1}{\eta} \cdot \frac{Q}{nd^3} \cdot \frac{gH}{n^2 d^2} = \frac{\psi \varphi}{\eta}$

Tabella 2 - Gruppi adimensionali

Le relazioni 1), 2) e 3) possono essere allora riscritte nella forma adimensionale seguente

$$\psi = f_1(\varphi, Re, \frac{l_1}{d}, \dots, \frac{l_i}{d}) \quad 6)$$

$$\eta = f_2(\varphi, Re, \frac{l_1}{d}, \dots, \frac{l_i}{d}) \quad 7)$$

$$\hat{P} = f_3(\varphi, Re, \frac{l_1}{d}, \dots, \frac{l_i}{d}) \quad 8)$$

Tale analisi può essere ulteriormente semplificata se ci si riferisce a macchine simili dal punto di vista geometrico, ossia a macchine della stessa famiglia. Allora per le macchine aventi la stessa forma si ha:

$$\begin{cases} \psi = f_1(\varphi, Re) \\ \eta = f_2(\varphi, Re) \\ \hat{P} = f_3(\varphi, Re) \end{cases} \quad 9)$$

Se oltre a considerare la famiglia di macchine geometricamente simili, si assume che il numero di Reynolds sia costante, cioè che possano essere trascurati gli effetti della viscosità del fluido, si giunge ad un'ulteriore semplificazione, secondo cui le prestazioni delle macchine possono essere espresse in funzione di un unico parametro, come riportato dalle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \psi = f_1(\varphi) \\ \eta = f_2(\varphi) \\ \hat{P} = f_3(\varphi) \end{cases} \quad 10)$$

Ne consegue che è possibile illustrare graficamente tali legami funzionali, rappresentando l'andamento dei vari coefficienti al variare di un unico parametro, come riportato nella figura 2. Questo risultato è particolarmente importante perché le prestazioni di macchine aventi medesima forma ma diametri diversi d_1, d_2, \dots, d_n ovvero geometricamente simili, possono essere rappresentati da un'unica curva. Tutte le curve caratteristiche delle macchine simili al variare di n e della geometria sono rappresentabili da un'unica curva adimensionale nel piano ψ - φ (a meno degli effetti di Reynolds assunti trascurabili).

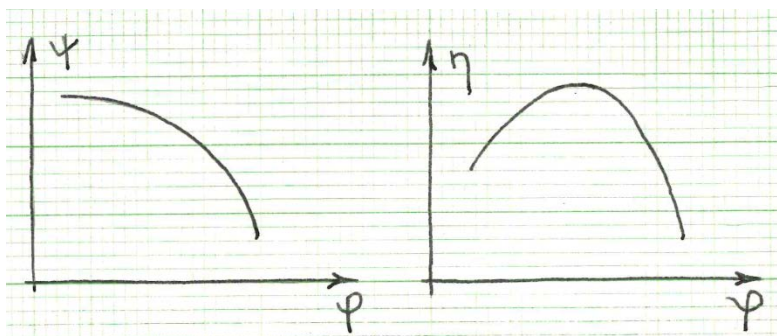


Figura 2 - Caratteristica adimensionale di una macchina operatrice

Quanto descritto si rivela uno strumento particolarmente efficace a livello sperimentale, poiché da la possibilità di compiere delle misure su una macchina di dimensioni ridotte, assunta come modello, con cui determinare le curve caratteristiche delle macchine della stessa famiglia. Attraverso la conoscenza della curva adimensionale sarà poi possibile tracciare, per una macchina reperibile sul mercato, la mappa per i diversi punti di funzionamento, come quella riportata nella figura 3.

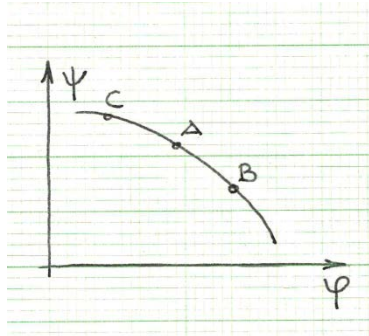


Figura 3 - Caratteristica adimensionale di una macchina operatrice

Supponiamo di scegliere una macchina avente diametro d_1 , per la quale sono valide le definizioni di ψ e φ ricavate precedentemente e di esprimerle per un generico punto A sul piano adimensionale ψ - φ di figura 3. Si può scrivere che

$$\varphi_A = \frac{Q}{n d_1^3} \quad 11)$$

$$\psi_A = \frac{gH}{n^2 d_1^2} \quad 12)$$

Combinando le 2 equazione ed eliminando n si ottiene

$$gH = \frac{\psi_A}{\varphi_A^2 d_1^4} Q^2 = k_A \cdot Q^2 \quad 13)$$

da cui si evince che il legame che sussiste tra la prevalenza e la portata è descritto da una parabola che passa per l'origine. Pertanto per una fissata macchina, il punto "A" corrisponde ad infiniti punti appartenenti alla parabola di costante K_A sul piano gH - Q . Lo stesso risultato si ottiene prendendo in considerazione il punto B, per il quale si otterrà un diverso valore del coefficiente della parabola K . Scegliendo ulteriori punti di funzionamento sul diagramma ψ - φ , si potranno tracciare ulteriori parabole sulle quali si possono individuare i punti caratterizzati dal medesimo valore del numero di giri della macchina. Tali punti sono infatti immediatamente calcolabili utilizzando le relazioni 11) e 12) per determinare i valori di Q e gH , avendo stabilito il diametro della macchina d_1 e il numero dei giri n oltre a conoscere i valori adimensionali di ψ e φ corrispondenti a ciascuna parabola. L'unione di tali punti definisce una delle curve caratteristiche dimensionali ad n costante della macchina di diametro d_1 . La mappa completa delle curve caratteristiche della macchina al variare di n , si otterranno ripetendo il procedimento per un diverso valore della velocità di rotazione come rappresentato nella figura 4. Il procedimento generale può essere ovviamente esteso a tutte le macchine della stessa famiglia ovvero a tutte le macchine geometricamente simili che sono rappresentate dalla medesima curva caratteristica adimensionale. Questo risultato è particolarmente rilevante ai fini della determinazione sperimentale delle prestazioni delle macchine operatrici e non solo in quanto le prove eseguite su una macchina che possiamo definire "modello" è utilizzabile per ricavare le prestazioni di tutte le macchine geometricamente simili.

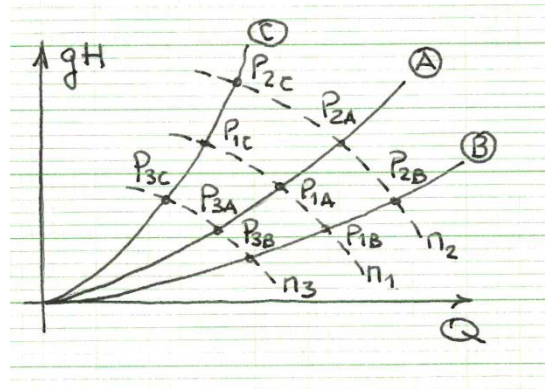


Figura 4 - Diagramma dei punti di funzionamento in similitudine.

LA TEORIA DELLA SIMILITUDINE

La teoria della similitudine è uno strumento utilizzato per risolvere problemi di progetto che si basa sull'ipotesi che le prestazioni delle macchine dipendono dalla loro geometria e dalle loro condizioni di funzionamento, La teoria della similitudine sfrutta l'analisi dimensionale, per semplificare problemi fisici complessi.

Similitudine geometrica

Si considerino due macchine geometricamente simili, ovvero aventi la stessa forma. Siano M.1 la macchina modello ed M.2 la macchina prototipo, aventi le seguenti caratteristiche dimensionali

$$M.1) \quad d, l_1, l_2, l_3, \dots, l_i$$

$$M.2) \quad d_m, l_{1m}, l_{2m}, l_{3m}, \dots, l_{im}$$

Tali grandezze sono grandezze omologhe e corrispondenti, cioè fanno riferimento agli stessi punti. Operando il rapporto tra le grandezze delle due macchine si ottiene il rapporto di scala indicato con λ :

$$\frac{d_m}{d} = \frac{l_{1m}}{l_1} = \frac{l_{2m}}{l_2}, \dots, = \frac{l_{im}}{l_i} = \lambda$$

E' possibile a questo punto definire che due macchine sono geometricamente simili se stanno in un rapporto di scala costante.

Similitudine temporale

Con lo stesso ragionamento fatto precedentemente si pensi ora di fare riferimento agli intervalli temporali relativi alle due macchine e relativi ad esempio al tempo di rotazione della girante Δt_1 , al tempo di percorrenza dei condotti palari Δt_2 o di due qualsiasi tratti omologhi Δt_3 . Se questi intervalli di tempo sono in rapporto τ costante, si parla di similitudine temporale.

Le due macchine caratterizzate dagli intervalli di tempo Δt_i e Δt_{im}

$$M.1: \quad \Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3, \dots, \Delta t_i$$

$$M.2: \quad \Delta t_{1m}, \Delta t_{2m}, \Delta t_{3m}, \dots, \Delta t_{im}$$

presentano un rapporto tra tali intervalli di tempo pari a τ :

$$\frac{\Delta t}{\Delta t_m} = \frac{\Delta t'}{\Delta t'_m}, \dots, = \frac{\Delta t''}{\Delta t''_m} = \tau$$

Se il rapporto $\tau = \text{cost.}$ le due macchine soddisfano la similitudine temporale.

Similitudine cinematica

Se due macchine, soddisfano contemporaneamente sia la similitudine geometrica sia quella temporale, allora si trovano in similitudine cinematica. Poiché è verificata la condizione $\lambda = \text{cost.}$ e $\tau = \text{cost.}$, sarà sicuramente verificata anche la condizione $\lambda/\tau = \text{cost.}$ Sviluppando tale rapporto secondo i parametri descritti nei paragrafi precedenti, si può scrivere che

$$\frac{\lambda}{\tau} = \frac{d_{1m}}{d_1} \frac{\Delta t_1}{\Delta t_{1m}} = \frac{d_{1m}}{\Delta t_{1m}} \frac{\Delta t_1}{d_1} = \frac{u_m}{u} \quad 14)$$

$$\frac{\lambda}{\tau} = \frac{l_{1m}}{l_1} \frac{\Delta t_2}{\Delta t_{2m}} = \frac{l_{1m}}{\Delta t_{2m}} \frac{\Delta t_2}{l_1} = \frac{c_m}{c} \quad 15)$$

In tal senso i rapporti sviluppati indicano dei rapporti tra moduli e sono rappresentativi di:

- $\frac{u_m}{u}$ rapporto tra la velocità di trascinamento del modello e del prototipo;
- $\frac{c_m}{c}$. rapporto tra la velocità del flusso nel modello e nel prototipo, se si indica con le grandezze l_{1m} e l_1 la distanza percorsa nel canale rotorico.

La similitudine cinematica tra due macchine, implica che i vettori velocità e accelerazione avranno, in punti omologhi delle due macchine la stessa direzione e il medesimo verso e modulo in rapporto costante, ossia, che nei punti omologhi delle due macchine i triangoli di velocità sono simili.

Inoltre, poiché $\frac{u_m}{u} = \frac{c_m}{c} = \text{cost.}$, ne deriva che $\frac{c_m}{u_m} = \frac{c}{u} = \varphi = \text{cost.}$, perciò due macchine cinematicamente simili hanno lo stesso coefficiente di portata.

Similitudine dinamica

Se ora si considera che le due macchine elaborano ciascuna un flusso incompressibile ovvero con $\rho = \text{cost.}$, si ha che

$$M.1: \rho = \text{cost.}$$

$$M.2: \rho_m = \text{cost.}$$

Si può allora certamente affermare che anche il rapporto $\rho/\rho_m = \text{cost.}$ per cui le due macchine sono in similitudine dinamica ossia che il rapporto tra le forze che si sviluppano nel modello e nel prototipo sono in un rapporto costante $F/F_m = \text{cost.}$ Poiché le forze sono dei vettori, soddisfare la similitudine dinamica significa che i vettori forza che si sviluppano in punti omologhi delle due macchine hanno stessa direzione e verso, e rapporto tra i moduli costante.

Se risulta verificata la similitudine dinamica fra due macchine geometricamente simili, allora saranno uguali anche i parametri adimensionali presenti nelle relazioni 9). Viceversa se risultano uguali i parametri adimensionali della 9) per due macchine geometricamente simili, queste si trovano ad operare in condizioni di similitudine dinamica. Occorre osservare che affinché sia soddisfatta la similitudine dinamica tra due condizioni di flusso è necessario che anche il numero di Reynolds sia lo stesso. Tuttavia nella maggior parte delle condizioni considerate gli effetti del numero di Reynolds sono spesso trascurabili per cui le condizioni di similitudine generale saranno soddisfatte dalla sola coppia di parametri adimensionali $\varphi = \text{cost.}$ e $\psi = \text{cost.}$ il che comporta automaticamente $\eta = \text{cost.}$ e $\hat{P} = \text{cost.}$

Numero di giri specifico

Nell'ambito delle ipotesi fatte ad ogni punto scelto sulle curve caratteristiche adimensionali corrispondono differenti condizioni di similitudine dinamica. Pertanto per una famiglia di macchine geometricamente simili esistono infinite condizioni di similitudine dinamica ciascuna caratterizzata da una terna di valori ψ , φ , η e conseguentemente \hat{P} .

Tra le infinite condizioni occupa una posizione di rilievo quella relativa alla condizione di massimo rendimento (punto P* in figura 5), con i parametri corrispondenti individuati dalle coordinate ψ^* e φ^* .

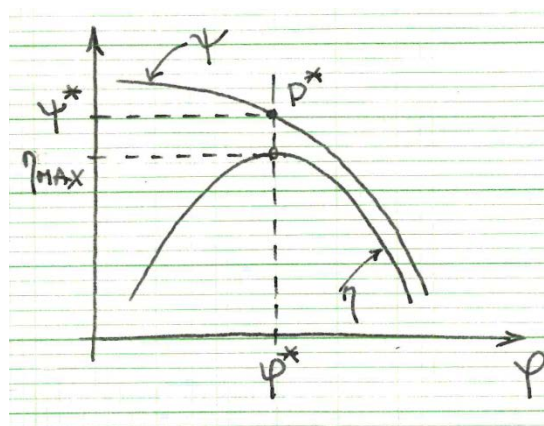


Figura 5 - Curve caratteristiche per una famiglia di macchine in similitudine geometrica.

I coefficienti ψ^* e φ^* relativi a tale punto, permettono di costruire un nuovo parametro adimensionale detto numero di giri specifico, rappresentativo delle menzionate condizioni (massimo rendimento). associato alla portata, alla prevalenza e al numero di giri della macchina:

$$n_s = \frac{\varphi^{*2}}{\psi^{*4}} = \left(\frac{Q}{nd^3}\right)^2 \left(\frac{n^2 d^2}{gH}\right)^{\frac{3}{4}} = n \frac{Q^{\frac{1}{2}}}{(gH)^{\frac{3}{4}}} \quad 16)$$

Allora per una famiglia di macchine geometricamente simili il numero di giri specifico n_s valutato per le condizioni di massimo rendimento è unico e può pertanto essere preso come identificativo della forma delle macchine. Al variare della forma delle macchine simili si modificano anche le prestazioni e le condizioni di massimo rendimento e di conseguenza anche n_s .

Da questo punto di vista il numero di giri specifico rappresenta uno strumento efficacissimo per caratterizzare la macchina sotto il profilo della forma geometrica e delle prestazioni.

$$n_s = n \frac{Q^{\frac{1}{2}}}{(gH)^{\frac{3}{4}}}$$

Per considerare come può variare la forma geometrica di una macchina al variare di n_s si consideri la relazione sopra riportata. Si può osservare che a parità del numero di giri n , basse portate e alte prevalenze determinano valori del numero di giri specifico bassi, viceversa, per elevate portate e basse prevalenze si avranno numero di giri specifici elevati.

Se si rappresentano gli andamenti di ψ e φ in funzione del numero di giri specifico, su base statistica, si ottiene l'andamento illustrato nel diagramma di figura 6, da cui si evince che al crescere del numero di giri specifico φ aumenta e ψ diminuisce.

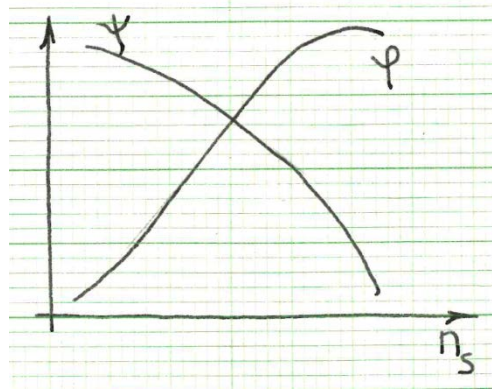


Figura 6 - Andamento statistico del coefficiente di pressione e di portata al variare del numero di giri specifico.

Analisi di macchine con diverso numero di giri specifico

a) Si ipotizzi di fissare la portata Q e la prevalenza gH .

In tal caso in base alla 16) al crescere di n_s deve aumentare n . Considerando tre diverse situazioni corrispondenti a differenti valori del numero di giri specifico si può ritenere che

la componente della velocità responsabile della portata non sia molto diversa per cui si può considerare che la sezione di ingresso sia la stessa. Si avrà che:

$$n_{s1} < n_{s2} < n_{s3}$$

$$gH_1 = gH_2 = gH_3$$

$$Q_1 = Q_2 = Q_3$$

$$n_1 < n_2 < n_3$$

ossia, a parità di prestazioni la macchina avente n_s più elevato ruoterà a velocità superiore rispetto alla macchina con n_s più basso.

Per i coefficienti di pressione ψ e di portata ϕ invece si può, dal diagramma di figura 6, osservare che al crescere del numero di giri specifico ϕ cresce e ψ diminuisce, pertanto, dalla definizione del coefficiente ϕ , avendo fissato la portata, è necessario che il diametro esterno della macchina diminuisca. Perciò riassumendo si avrà:

$$n_{s1} < n_{s2} < n_{s3}$$

$$\phi_1 < \phi_2 < \phi_3$$

$$\psi_1 > \psi_2 > \psi_3$$

$$d_1 > d_2 > d_3$$

Il numero di giri specifico è perciò indicativo della tipologia o forma geometrica della macchina. La figura 7 illustra schematicamente le diverse forme geometriche che si hanno a parità di sezione di ingresso al varare di n_s . La macchina 1 è una macchina a sviluppo prevalentemente radiale, caratterizzata da bassi n_s ed elevati diametri esterni, la macchina 2 è invece una macchina a flusso misto, caratterizzata da n_s e diametri esterni intermedi, infine la macchina 3 è una macchina a sviluppo assiale, caratterizzata da n_s elevati e piccoli diametri esterni.

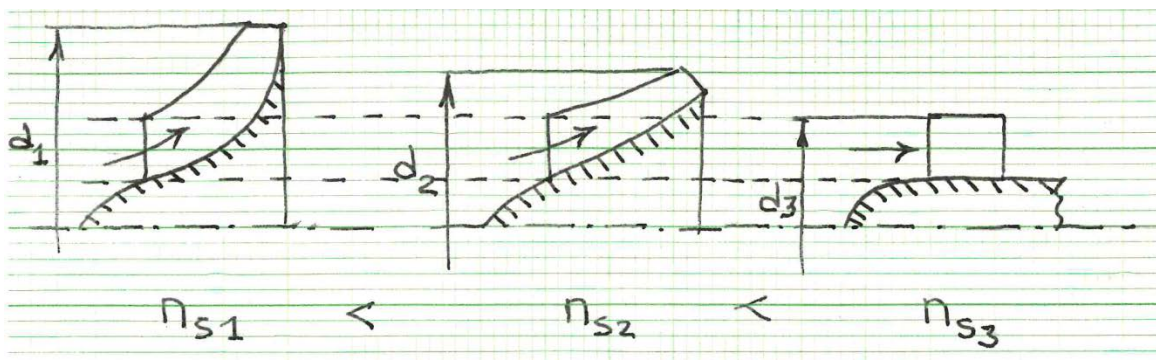


Figura 7 - Forme geometriche delle macchine al variare di n_s fissata la sezione di ingresso

b) Si supponga ora di fissare il diametro esterno d e la prevalenza gH . Le tipologie di macchine al variare del numero di giri specifico si otterranno seguendo i medesimi ragionamenti fatti per il caso a). Si può allora scrivere che:

$$n_{s1} < n_{s2} < n_{s3}$$

$$gH_1 = gH_2 = gH_3$$

$$d_1 = d_2 = d_3$$

$$n_1 < n_2 < n_3$$

$$\phi_1 < \phi_2 < \phi_3$$

$$\psi_1 > \psi_2 > \psi_3$$

$$Q_1 < Q_2 < Q_3$$

Anche in questo caso, valgono le considerazioni fatte circa l'andamento delle velocità di rotazione delle macchine e circa l'andamento dei coefficienti di pressione e portata al variare del numero di giri specifico, mentre si fa notare che poiché è fissato il diametro esterno della macchina, dalla definizione del coefficiente di portata, al diminuire di n e di ϕ , diminuisce anche la portata Q . Perciò a parità di diametro esterno la sezione di ingresso, essendo proporzionale a Q , mostrerà sezioni crescenti con n_s .

In questo caso, come illustrato nella figura 8 le macchine radiali, caratterizzate da bassi n_s , hanno una sezione di entrata di piccolo diametro, le macchine a flusso misto caratterizzate da n_s intermedi hanno di conseguenza una sezione di ingresso di diametro intermedio e le macchine assiali, caratterizzate da n_s più elevati, hanno sezione di entrata di diametro maggiore rispetto alle precedenti.

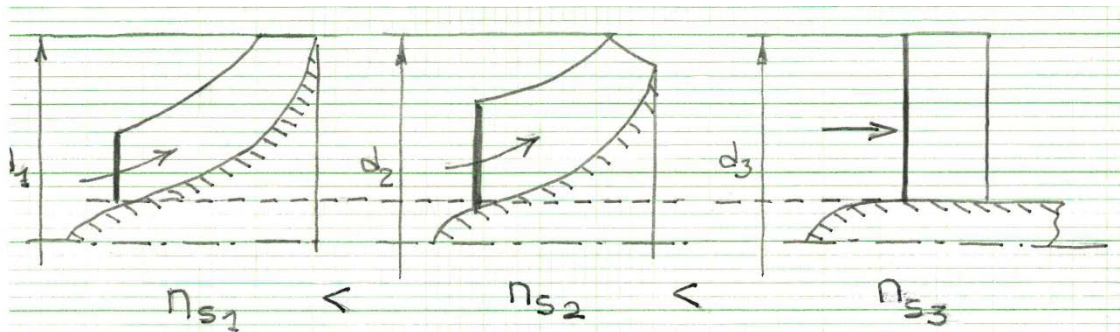


Figura 8 - Forme geometriche delle macchine al variare di n_s fissata il diametro esterno

c) Un analogo ragionamento può essere ripetuto fissando la portata Q e la velocità di rotazione n . In questo caso al crescere di n_s deve diminuire la prevalenza e in base alla sua definizione questo comporterà la diminuzione del diametro esterno della macchina e quindi si giungerà alle medesime conclusioni dei casi precedenti.

E' evidente che il diagramma di figura 6 è di notevole aiuto in fase di progettazione perché consente a partire da n_s di effettuare un preliminare dimensionamento di massima della macchina. Anche il rendimento può essere previsto in funzione di n_s .

Diametro specifico

Un altro parametro adimensionale molto importante è il diametro specifico, ottenibile combinando le definizioni dei parametri ψ e φ in modo da eliminare la velocità di rotazione n .

$$d_s = \frac{\psi^{1/4}}{\varphi^{1/2}} = d \frac{(gH)^{1/4}}{Q^{1/2}} \quad (17)$$

Anche tale parametro è di notevole utilità in fase di progettazione perché può fornire la dimensione della macchina. Dalla definizione data infatti, si può osservare che per alte prevalenze e basse portate, si avranno macchine contraddistinte da elevati diametri specifici a cui corrispondono come visto bassi numeri di giri specifici n_s , viceversa, per basse prevalenze e alte portate, si avranno macchine contraddistinte da piccoli diametri specifici d_s e perciò alti numeri di giri specifici n_s . Grazie a questi due parametri è possibile stabilire la forma della macchina fissati i dati di progetto. In base ai dati statistici sono state fornite delle rappresentazioni grafiche molto utili come il diagramma di Cordier riportato nella figura 9, in cui si riporta l'andamento di n_s in funzione di d_s con l'indicazione del campo di esistenza delle differenti tipologie di turbomacchine.

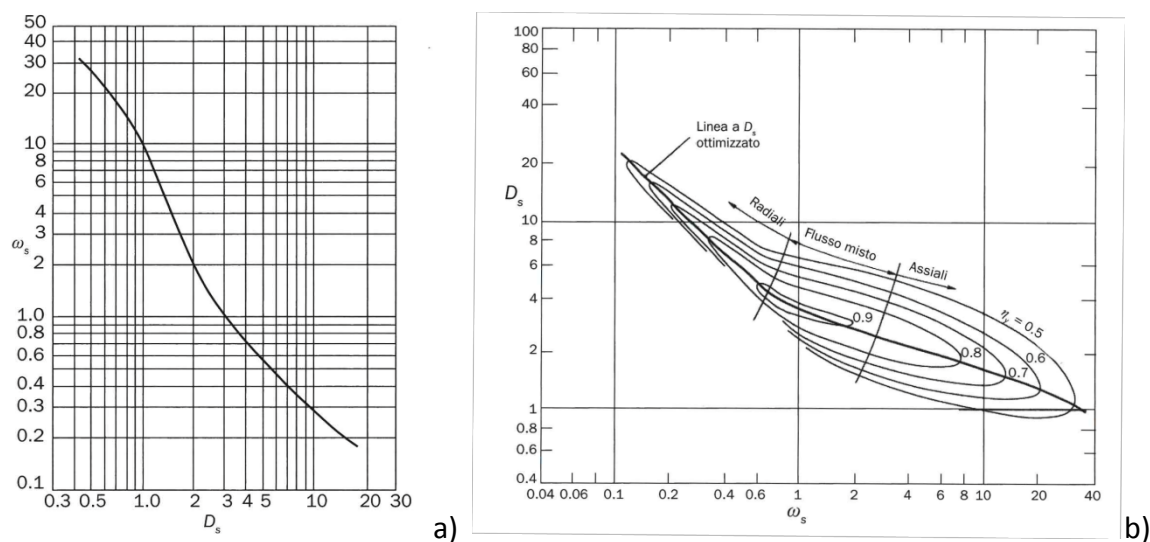


Figura 9 -a) Diagramma di Cordier b) diagramma di Balje per le pompe $\omega_s = \omega \frac{Q^{1/2}}{(gH)^{3/4}}$

Considerazioni ed osservazioni

Finora, sono stati considerati trascurabili gli effetti della viscosità rappresentati dalla presenza del numero di Reynolds nelle relazioni 9). Se invece si vuole rispettare anche l'uguaglianza del numero di Reynolds per soddisfare la similitudine dinamica completa, occorre imporre un ulteriore vincolo. Pertanto se si vuole che due configurazioni di flusso in macchine geometricamente simili rispettino le condizioni di similitudine occorre rispettare anche l'uguaglianza di Re nelle due configurazioni a confronto. Ciò significa che se i due sistemi operano con il medesimo fluido per rispettare Re occorre soddisfare la condizione seguente:

$$(nd)d = cost$$

Ulteriori considerazioni vanno fatte se il fenomeno fisico vede l'influenza della forza peso non più trascurabile (turbine idrauliche Kaplan, eliche marine). In questi casi l'accelerazione di gravità (forza peso per unità di massa) compare come variabile indipendente nelle equazioni funzionali delle prestazioni della macchina.

L'accelerazione di gravità quando viene resa adimensionale porta a definire un nuovo gruppo adimensionale: il numero di Froude Fr.

$$g [LT^{-2}] \quad \rightarrow \quad \frac{g}{d n^2} = \frac{g d}{d^2 n^2} [-] \quad \rightarrow \quad Fr = \frac{n d}{\sqrt{g d}} \quad 18)$$

In molte applicazioni di ingegneria navale e del settore nautico è necessario che siano rispettati contemporaneamente sia il numero di Reynolds che il numero di Froude, ovvero:

$$\begin{cases} Re \rightarrow (nd)d = cost \\ Fr \rightarrow \frac{nd}{\sqrt{d}} = cost \end{cases}$$

Tuttavia è immediato osservare che se si soddisfa il primo il secondo non è soddisfatto e viceversa, pertanto occorre effettuare delle scelte operative dettate dall'importanza dell'uno o dell'altro parametro in relazione alla specifica applicazione.

Flusso comprimibile

Si vuole estendere l'analisi dimensionale alle macchine in cui evolve un fluido comprimibile. In un flusso comprimibile non si possono trascurare gli effetti termici, ovvero la comprimibilità tipica dei gas. Si suppone che il gas evolvente sia un gas perfetto per cui valgono le relazioni:

$$\begin{cases} k = \frac{C_p}{C_v} \\ R = \frac{\mathcal{R}}{m} = C_p - C_v \end{cases}$$

Per l'applicazione dell'analisi dimensionale a tali fluidi, si consideri un compressore dinamico azionato da un motore primo come quello schematizzato nella figura 10, e si varino le sue condizioni di funzionamento agendo sulla valvola di strozzamento posta alla mandata del compressore e sulla sua velocità di rotazione. Sul piano entalpico il fluido passa dalle condizioni totali p_{t1} e T_{t1} a quelle finali definite da p_{t2} e T_{t2} , attraverso una trasformazione adiabatica. La trasformazione di compressione reale differisce da quella ideale isoentropica (figura 11).

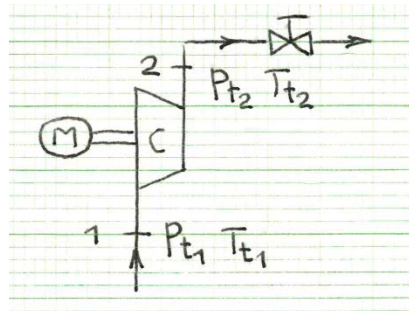


Figura 10 - Schema del compressore dinamico.

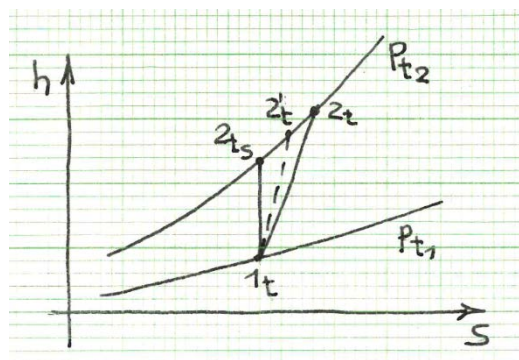


Figura 11 - Trasformazione isoentropica e reale di compressione.

Tuttavia al variare dell'efficienza della trasformazione di compressione il punto reale finale 2_t tende a spostarsi e il salto entalpico cambia. Riferendosi alle condizioni totali del flusso, la prestazione del compressore può essere espressa come incremento di entalpia totale

della trasformazione reale o in alternativa come incremento di entalpia totale della trasformazione isoentropica.

$$\Delta h_t = h_{t2} - h_{t1}$$

$$(\Delta h_t)_s = h_{t_{2s}} - h_{t1}$$

Benché per definire le prestazioni di una turbomacchina a flusso comprimibile si possa utilizzare indifferentemente il salto entalpico totale reale o isoentropico, ragioni di carattere pratico, legate anche alle grandezze che operativamente vengono misurate, fanno preferire la pressione totale alla mandata del compressore p_{t2} a cui si aggiunge anche la differenza di temperatura totale ΔT_t anziché la potenza oltre naturalmente il rendimento.

Tenendo conto delle grandezze indipendenti che influenzano le prestazioni di una turbomacchina a flusso comprimibile, queste sono rappresentate dalle seguenti relazioni funzionali valide per tutte le macchine appartenenti alla stessa famiglia di macchine geometricamente simili:

$$p_{t2} = f_1(n, d, \dot{m}, p_{t1}, T_{t1}, k, R, \mu) \quad 19)$$

$$\eta = f_2(n, d, \dot{m}, p_{t1}, T_{t1}, k, R, \mu) \quad 20)$$

$$\Delta T_t = f_3(n, d, \dot{m}, p_{t1}, T_{t1}, k, R, \mu) \quad 21)$$

Analogamente all'analisi dimensionale effettuata per il caso di flusso incomprimibile, si individuano le grandezze fondamentali che del fenomeno fisico in esame che in questo caso sono pari a $q=4$:

- Lunghezza [L];
- Massa [M];
- Tempo [T];
- Temperatura [θ].

Il numero di variabili che intervengono nella relazione funzionale è pari a $n=9$, per cui applicando il teorema di Buckingham si costruiranno $n-q=9-4=5$ gruppi adimensionali utilizzabili per esprimere le prestazioni.

Delle nove variabili indipendenti, le quattro rappresentative delle grandezze fondamentali sono per la lunghezza il diametro della girante $d[L]$, per il tempo il numero di giri $n[T^{-1}]$, per la massa la pressione totale iniziale $p_{t1}[ML^{-1}T^{-2}]$ e per la temperatura la temperatura all'ingresso $T_{t1}[\theta]$. Le rimanenti variabili saranno ora rese adimensionali utilizzando le suddette variabili considerate per rappresentare le grandezze fondamentali. Si creeranno perciò $n-q$ gruppi adimensionali, che sono riportati nella tabella 3.

Azzerando le variabili citate poco sopra, si ottengono i gruppi adimensionali riassunti nella tabella 3, nella quale non si riportano il rapporto tra calori specifici "k" e il rendimento "η" perché sono già adimensionali.

Variabili	Gruppo adimensionale
$p_{t1} [ML^{-1}T^{-2}]$	$\frac{p_{t2}}{p_{t1}}$
$T_{t1} [\vartheta]$	$\frac{\Delta T_t}{T_{t1}}$
$R [L^2T^{-2}\vartheta^{-1}]$	$\frac{R T_{t1}}{d^2 n^2}$
$\dot{m} [MT^{-1}]$	$\frac{\dot{m} n}{p_{t1} d}$
$\mu [ML^{-1}T^{-1}]$	$\frac{\mu}{p_{t1} n}$

Tabella 3 - Gruppi adimensionali per flusso comprimibile

I parametri adimensionali trovati permettono di riscrivere le relazioni funzionali delle prestazioni della macchina nella forma seguente:

$$\frac{p_{t2}}{p_{t1}} = f_1 \left(\frac{\dot{m} n}{p_{t1} d}, \frac{\mu n}{p_{t1}}, \frac{R T_{t1}}{n^2 d^2}, k \right) \quad 22)$$

$$\eta = f_2 \left(\frac{\dot{m} n}{p_{t1} d}, \frac{\mu n}{p_{t1}}, \frac{R T_{t1}}{n^2 d^2}, k \right) \quad 23)$$

$$\frac{\Delta T_t}{T_{t1}} = f_3 \left(\frac{\dot{m} n}{p_{t1} d}, \frac{\mu n}{p_{t1}}, \frac{R T_{t1}}{n^2 d^2}, k \right) \quad 24)$$

Si può ora applicare il principio di trasformazione degli adimensionali, combinando i diversi gruppi adimensionali tra di loro per ricavare altri gruppi adimensionali. In pratica i diversi gruppi adimensionali possono essere divisi e/o moltiplicati fra loro, elevati a potenza senza che questo ne modifichi la dimensione per cui le relazioni funzionali trovate possono anche essere espresse diversamente evidenziando altri gruppi adimensionali. In particolare moltiplicando i gruppi adimensionali associati alla portata massica e alla costante particolare del gas si ottiene:

Coefficiente di portata
$$\Phi = \frac{\dot{m} n}{p_{t1} d} \cdot \sqrt{\frac{R T_{t1}}{n^2 d^2}} = \dot{m} \frac{\sqrt{R T_{t1}}}{p_{t1} d^2}$$

Numero di Reynolds
$$\frac{\mu n}{p_{t1} d} \frac{R T_{t1}}{n^2 d^2} = \frac{\mu}{\rho_{t1} \cdot n \cdot d \cdot d} \rightarrow \text{Re} = \frac{\rho_{t1} \cdot (nd) \cdot d}{\mu}$$

Per quanto riguarda la costante dei gas, moltiplicando il gruppo adimensionale per k e mettendo tutto sotto radice si ha:

$$\frac{R T_{t1}}{n^2 d^2} \rightarrow \sqrt{k \frac{R T_{t1}}{n^2 d^2}} = \frac{\sqrt{k R T_{t1}}}{n d} = \frac{a_{t1}}{n d} \rightarrow \text{Ma} = \frac{n d}{a_{t1}}$$

Le prestazioni di una turbomacchina che opera con fluido comprimibile dipenderanno dunque dal coefficiente di portata, dal numero di Reynolds, dal numero di Mach e dal rapporto k tra i calori specifici:

$$\frac{p_{t2}}{p_{t1}} = f_1 \left(\frac{\dot{m}\sqrt{RT_{t1}}}{p_{t1}d^2}, Ma, Re, k \right) \quad 25)$$

$$\eta = f_2 \left(\frac{\dot{m}\sqrt{RT_{t1}}}{p_{t1}d^2}, Ma, Re, k \right) \quad 26)$$

$$\frac{\Delta T_t}{T_{t1}} = f_3 \left(\frac{\dot{m}\sqrt{RT_{t1}}}{p_{t1}d^2}, Ma, Re, k \right) \quad 27)$$

Fissando il fluido ($R=\text{cost.}$, $k=\text{cost.}$) e la macchina ($d=\text{cost.}$), queste variabili possono essere inglobate nelle costanti e quindi si può decidere di non farle comparire nei gruppi adimensionali trovati che però perdono tale caratteristica. Inoltre considerando trascurabile l'influenza del numero di Reynolds Re (nelle turbomacchine in genere il numero di Reynolds è elevato o variabile in ristretti campi) le prestazioni della specifica macchina risultano espresse dalle seguenti relazioni funzionali:

$$\frac{p_{t2}}{p_{t1}} = f_1 \left(\frac{\dot{m}\sqrt{T_{t1}}}{p_{t1}}, \frac{n}{\sqrt{T_{t1}}} \right) \quad 30)$$

$$\eta = f_2 \left(\frac{\dot{m}\sqrt{T_{t1}}}{p_{t1}}, \frac{n}{\sqrt{T_{t1}}} \right) \quad 31)$$

$$\frac{\Delta T_t}{T_{t1}} = f_3 \left(\frac{\dot{m}\sqrt{T_{t1}}}{p_{t1}}, \frac{n}{\sqrt{T_{t1}}} \right) \quad 32)$$

in cui $\frac{\dot{m}\sqrt{T_{t1}}}{p_{t1}}$ è detta portata ridotta e $\frac{n}{\sqrt{T_{t1}}}$ è detto numero di giri ridotto. Si può notare come omettendo “ R ” e “ d ” i gruppi indipendenti indicati non siano più adimensionali: in base alle semplificazioni introdotte infatti, le curve espresse in funzione dei parametri ridotti non possono essere riferite ad una famiglia di macchine simili, ma solo ad una data macchina e ad un determinato fluido operativo, per cui tali parametri non rientrano nella definizione di parametri adimensionali

Questa semplificazione spiega perché correntemente le prestazioni delle turbomacchine a flusso comprimibile siano espressa secondo questa notazione. Le curve caratteristiche delle turbomacchine vengono espresse riportando il rapporto fra le pressioni totali in ingresso e in uscita al variare della portata ridotta e del numero di giri ridotto come ulteriore parametro. Queste curve rappresentano l'andamento del rapporto di compressione $\left(\frac{p_{t2}}{p_{t1}}\right)$ per i compressori o del rapporto di espansione $\left(\frac{p_{t1}}{p_{t2}}\right)$ per le turbine in funzione della portata ridotta per valori fissati del numero di giri ridotto.

La determinazione delle caratteristiche delle turbomacchine è l'elemento base per la valutazione delle prestazioni in condizioni di impiego reale.

Curve caratteristiche di una turbina

Le curve caratteristiche di una turbina vengono rappresentate su un piano in cui in ascissa è indicata la portata ridotta riferita alle condizioni di ingresso della macchina fluido ed in ordinate il rapporto di espansione (figura 12). La figura 12 indica l'aumento del rapporto di espansione con la portata e il numero di giri ridotto. La dipendenza dal numero di giri è tuttavia limitata e più evidente nella zona delle basse portate. Esiste inoltre una condizione critica che si verifica in corrispondenza della sezione minima della macchina, in cui il flusso è in choking ovvero il numero di Mach del flusso ha raggiunto il valore unitario e la portata ridotta risulta bloccata. Tale condizione di funzionamento per le turbine non è affatto rara in quanto essa può essere raggiunta senza la necessità di realizzare rapporti di espansione particolarmente elevati.

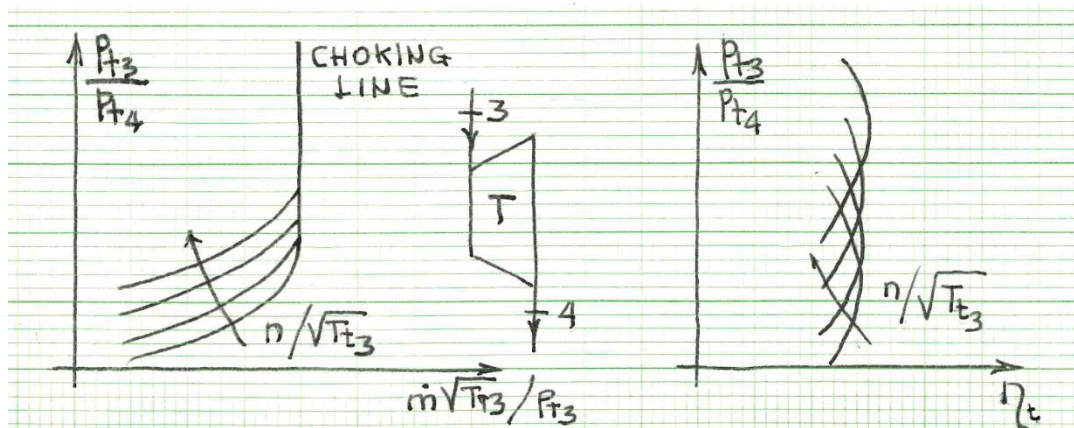


Figura 12 - - Curve caratteristiche per una turbina.

Nella turbina il rendimento non è molto sensibile alle variazioni delle condizioni di funzionamento (le curve sono abbastanza appiattite).

Curve caratteristiche di un compressore

Per quanto riguarda il compressore, le curve caratteristiche relative ciascuna ad un numero di giri ridotto sono riportate su un piano dove in ascissa è indicata la portata ridotta riferita alle condizioni di ingresso del fluido e in ordinate il rapporto di compressione. Dalla figura 12, in cui si riporta un esempio di tale mappa, si può notare come la zona delle basse portate sia delimitata dalla linea tratteggiata chiamata "surge line", che delimita la zona di funzionamento stabile del compressore. A sinistra di tale curva infatti il compressore opera in condizioni instabili che possono risultare molto pericolose per l'integrità stessa della macchina.

Nella zona delle alte portate il compressore può raggiungere le condizioni di choking e la portata ridotta risulta bloccata (caratteristica verticale).

Nel campo di funzionamento stabile le curve caratteristiche del compressore sono a pendenza negativa, ovvero muovendosi sulla curva a numero di giri ridotto costante, all'aumentare della portata ridotta, diminuisce il salto di pressione attraverso il compressore.

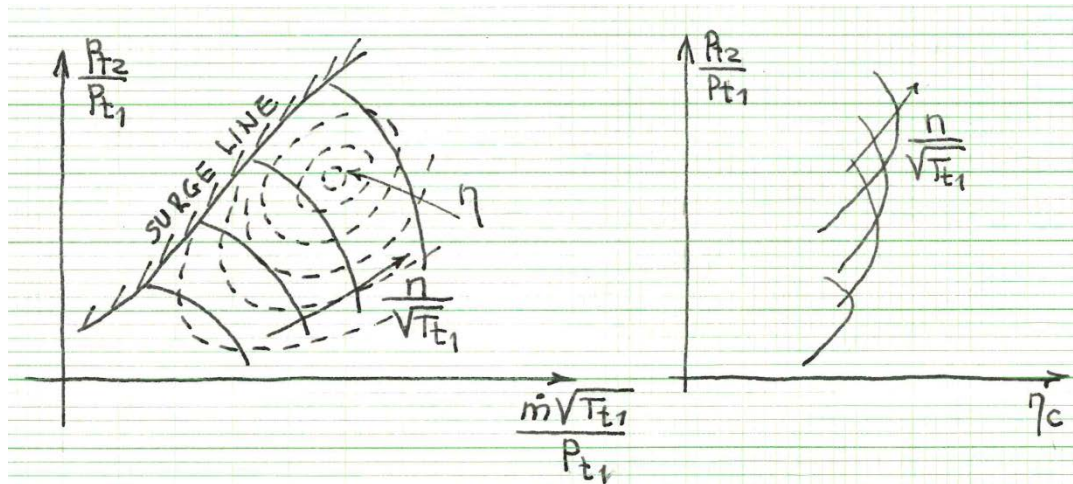


Figura 13 - Curve caratteristiche di un compressore.

Spesso sullo stesso diagramma si riportano anche le curve collinari a rendimento costante. Il rendimento varia abbastanza rapidamente con le condizioni di funzionamento. Pertanto rispetto alla condizione di funzionamento nominale (punto di progetto e di massimo rendimento) il rendimento si riduce sia al variare della portata sia della velocità di rotazione della macchina. La possibilità di utilizzare una palettatura a geometria variabile limita sicuramente la penalizzazione sul rendimento che comporta la variazione delle condizioni di funzionamento.