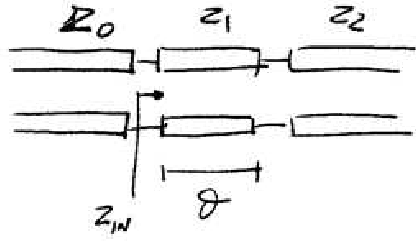
LINEE CON IMPEDENZA COSTANTE A TRATTI

In molti casi vengono utilizzate linee con impedenza costante a tratti, e con discontinuità piccole tra i vari tratti. In tal caso è possibile una valutazione approssimata del coefficiente di riflessione all'ingresso.

Consideriamo una struttura con due discontinuità



$Z_0 = 1$

Il coefficiente di riflessione alla seconda interfaccia vale

$$\Gamma_1 = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$$

L'impedenza alla prima interfaccia è allora

$$Z_{IN} = Z_1 \frac{1 + \Gamma_T}{1 - \Gamma_T}$$

dove $\Gamma_T = \Gamma_1 e^{-2j\vartheta}$.

Il coefficiente di riflessione corrispondente vale allora

$$\Gamma_{IN} = \frac{Z_{IN} - Z_0}{Z_{IN} + Z_0} = \frac{Z_1(1+\Gamma_T) - Z_0(1-\Gamma_T)}{Z_1(1+\Gamma_T) + Z_0(1-\Gamma_T)}$$

Introduciamo il parametro $\Gamma_0 = \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0}$ che chiamiamo coefficiente di riflessione locale e che sarebbe il coefficiente di riflessione all'ingresso se la linea con Z_1 fosse illimitata.

Risulta $Z_1 = Z_0 \frac{1+\Gamma_0}{1-\Gamma_0}$ e sostituendo in Γ_{IN}

$$\Gamma_{IN} = \frac{Z_0\left(\frac{1+\Gamma_0}{1-\Gamma_0}\right)(1+\Gamma_T) - Z_0(1-\Gamma_T)}{Z_0\left(\frac{1+\Gamma_0}{1-\Gamma_0}\right)(1+\Gamma_T) + Z_0(1-\Gamma_T)}$$

$$\Gamma_{IN} = \frac{(1+\Gamma_0)(1+\Gamma_T) - (1-\Gamma_0)(1-\Gamma_T)}{(1+\Gamma_0)(1+\Gamma_T) + (1-\Gamma_0)(1-\Gamma_T)} = \frac{2(\Gamma_0+\Gamma_T)}{2+2\Gamma_0\Gamma_T}$$

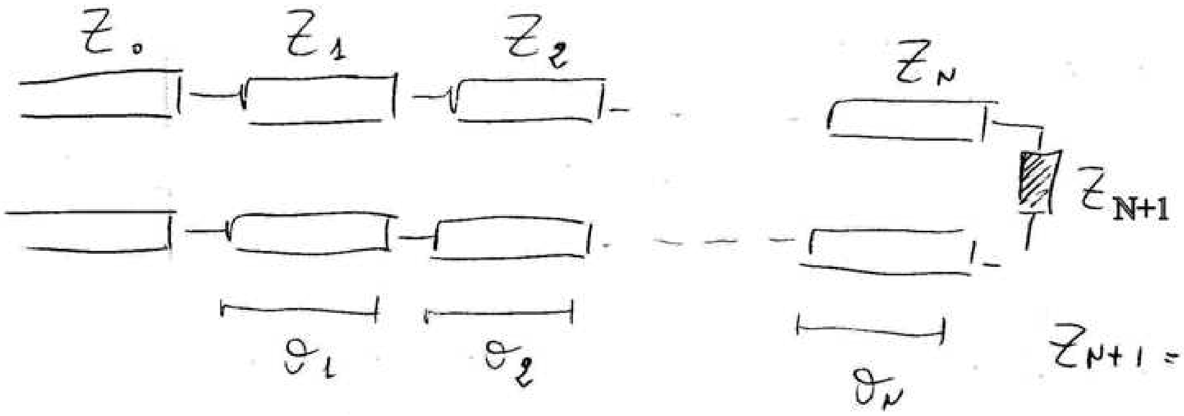
Se i salti di discontinuità sono piccoli, allora saranno piccoli anche i coefficienti di riflessione e segue ($2\Gamma_0\Gamma_T \simeq 0$) ($\ll 1$)

$$\Gamma_{IN} \simeq \Gamma_0 + \Gamma_T = \Gamma_0 + \Gamma_1 e^{-2j\vartheta}$$

Per un insieme di N linee, tutte con la stessa lunghezza, si ha quindi

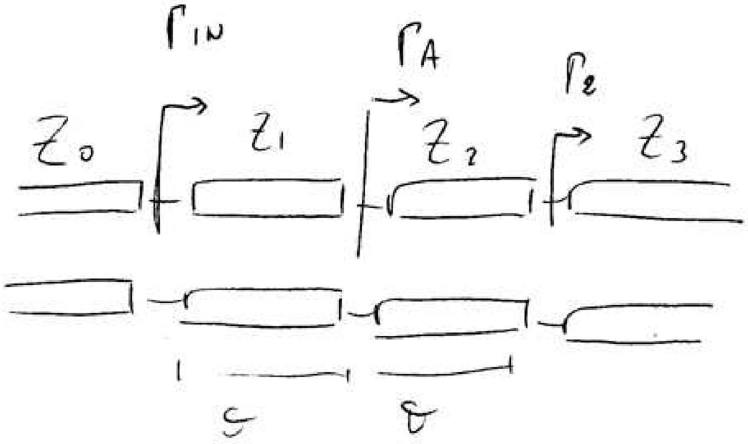
$$\Gamma_{IN} = \sum_{n=0}^{N} \Gamma_n e^{-2jn\vartheta}$$

polinomio di grado N in $e^{-2j\vartheta}$



$Z_{N+1} = Z_L$

$$\Gamma_m = \frac{Z_{m+1} - Z_m}{Z_{m+1} + Z_m} \qquad \vartheta_1 = \vartheta_2 = \dots = \vartheta_r$$



$$\Gamma_2 = \frac{Z_3 - Z_2}{Z_3 + Z_2}$$

$$\Gamma_A = \Gamma_1 + \Gamma_2 e^{-2j\theta} \qquad \Gamma_1 = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$$

$$\Gamma_{IN} = \Gamma_0 + \Gamma_A e^{-2j\theta} = \Gamma_0 + \left(\Gamma_1 + \Gamma_2 e^{-2j\theta}\right) e^{-2j\theta}$$

$$= \Gamma_0 + \Gamma_1 e^{-2j\theta} + \Gamma_2 e^{-4j\theta}$$

TRASFORMATORE BINOMIALE

Un trasformatore molto usato è quello che ha, alla frequenza centrale f_0, $N-1$ derivate di $|\Gamma(\theta)|$ nulle (filtro a massima piattezza). Per esso

$$\Gamma(\theta) = A\left(1 + e^{-2j\theta}\right)^N = A e^{-j\theta N} \cdot 2^N \cos^N\theta$$

$$|\Gamma(\theta)| = 2^N \cdot |A| \, |\cos\theta|^N$$

$|\Gamma(\theta)| = 0$ per $\theta = \frac{\pi}{2}$ che fissa la frequenza centrale (ovviamente quella per cui $\ell = \lambda/4$) così come le sue derivate.

Per determinare A notiamo che per $f \to 0$ $\theta \to 0$ e $\Gamma(0) = \dfrac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = 2^N A$ da cui A.

I vari Γ_n si ottengono sviluppando $\Gamma(\theta)$

$$\Gamma(\theta) = A \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} e^{-2jn\theta} \qquad (a+b)^N = \sum \binom{N}{n} a^n b^{N-n}$$

da cui il nome di trasformatore binomiale.
Ovviamente è possibile anche calcolare i coefficienti senza l'approssimazione di piccole riflessioni ed esistono tabelle contenenti i vari Z_n necessari.

Per calcolare la banda passante sia Γ_m il massimo accettabile di $\Gamma(\theta)$ e θ_m la lunghezza elettrica a cui si ha tale valore. Allora

$$\Gamma_m = 2^N |A| \, |\cos\theta_m|^N$$

$$\theta_m = \arccos\left[\frac{1}{2}\left|\frac{\Gamma_m}{A}\right|^{1/N}\right] = \arccos\left|\frac{\Gamma_m}{\Gamma(0)}\right|^{1/N}$$

Ora $\theta = f \cdot \dfrac{\ell}{v_f}$ da cui $f_0 = \dfrac{\pi v_f}{4\ell}$ e $f = \dfrac{v_f\,\theta}{\ell}$ per cui la banda passante (bilatera) è

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{2|f_m - f_0|}{f_0} = \frac{2\left|\theta_m - \frac{\pi}{4}\right|}{\frac{\pi}{4}} = \left|\frac{8\theta_m}{\pi} - 2\right|$$

Viceversa da $\Delta f/f_0$ e $\Gamma(0)$ si può calcolare l'ordine N necessario.

POLINOMI DI CHEBYCHEV

I polinomi di Chebychev, denotati con $T_n(x)$, sono dei polinomi dotati della proprietà di oscillare ~~tra~~ in $(-1,1)$ per $x \in (-1,1)$, con n zeri e quindi $n+1$ tra massimi e minimi, e di crescere monotonamente al di fuori.

I primi due polinomi sono $T_0(x) = 1$

$$T_1(x) = x$$

e ~~i~~ i successivi si ottengono da

$$T_n(x) = 2x\, T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$$

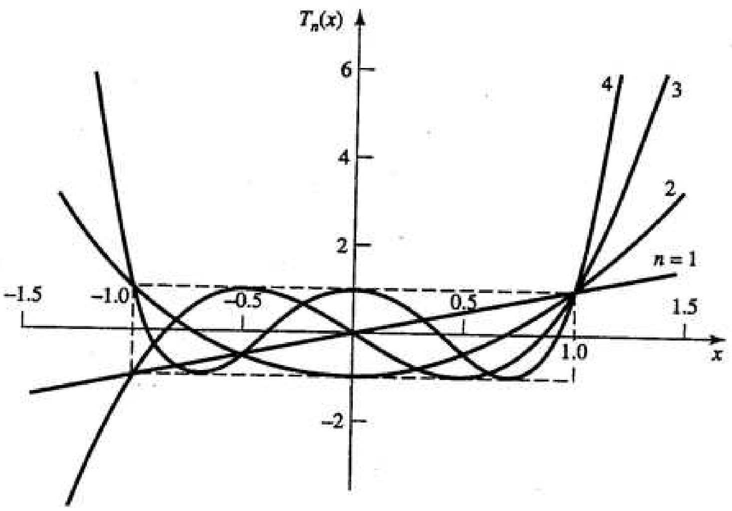
Se in particolare poniamo $x = \cos\vartheta$ (possibile in $|x|<1$) si ha

$$T_n(\vartheta) = \cos n\vartheta$$

o, equivalentemente
$$T_n(x) = \begin{cases} \cos(n \arccos x) & |x|<1 \\ \cosh(n \,\mathrm{settcosh}\, x) & |x|>1 \end{cases}$$

che mostra più chiaramente le suddette proprietà.

La proprietà di uguale oscillazione (equiripple) rende questi polinomi utili per ottenere coefficienti di riflessione "ottimali" in base al criterio di Bode-Fano



The first four Chebyshev polynomials, $T_n(x)$.

TRASFORMATORE DI CHEBYCHEV

Un trasformatore equiripple a N sezioni può essere ottenuto con[1]

$$\Gamma(\theta) = A \cdot T_N\,(u_m \cos\theta)\, e^{-iN\theta}$$

con un centro banda $\theta = \frac{\pi}{2}$ e una banda passante θ_m tale che

$$u_m \cos\theta_m = 1 \quad \Longrightarrow \quad u_m = \frac{1}{\cos\theta_m}$$

A frequenza nulla $(\theta = 0)$ si ha $\Gamma(0) = A\, T_N\left(\frac{1}{\cos\theta_m}\right)$

e quindi

$$A = \left[\frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}\ \frac{1}{T_N(1/\cos\theta_m)}\right]$$

D'altra parte $A = \Gamma_m$ (massimo di $|\Gamma|$ in banda passante) poiché $\max|T_N| = 1$ e quindi vale la relazione

$$T_N\left(\frac{1}{\cos\theta_m}\right) = \frac{1}{\Gamma_m}\left|\frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}\right|$$

ovvero

$$\frac{1}{\cos\theta_m} = \cosh\left[\frac{1}{N}\,\mathrm{sett}\cosh\left(\frac{1}{\Gamma_m}\left|\frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}\right|\right)\right]$$

che, per un fissato N, collega la banda passante e il ripple massimo in banda.

In genere la banda passante di un Chebychev è maggiore di quella di un binomiale in quanto $|\Gamma|$ è mediamente più grande nella banda passante.

I coefficienti si ottengono sviluppando il polinomio di Chebychev ed uguagliandolo a $\Gamma(\theta)$, o da apposite tabelle

(1) Il termine $e^{-iN\theta}$ serve ad ottenere un $\Gamma(\theta)$ funzione solo di $\cos\theta$.

TABLE 5.1 Binomial Transformer Design

	$N=2$		$N=3$			$N=4$			
Z_L/Z_0	Z_1/Z_0	Z_2/Z_0	Z_1/Z_0	Z_2/Z_0	Z_3/Z_0	Z_1/Z_0	Z_2/Z_0	Z_3/Z_0	Z_4/Z_0
1.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.5	1.1067	1.3554	1.0520	1.2247	1.4259	1.0257	1.1351	1.3215	1.4624
2.0	1.1892	1.6818	1.0907	1.4142	1.8337	1.0444	1.2421	1.6102	1.9150
3.0	1.3161	2.2795	1.1479	1.7321	2.6135	1.0718	1.4105	2.1269	2.7990
4.0	1.4142	2.8285	1.1907	2.0000	3.3594	1.0919	1.5442	2.5903	3.6633
6.0	1.5651	3.8336	1.2544	2.4495	4.7832	1.1215	1.7553	3.4182	5.3500
8.0	1.6818	4.7568	1.3022	2.8284	6.1434	1.1436	1.9232	4.1597	6.9955
10.0	1.7783	5.6233	1.3409	3.1623	7.4577	1.1613	2.0651	4.8424	8.6110

	$N=5$					$N=6$					
Z_L/Z_0	Z_1/Z_0	Z_2/Z_0	Z_3/Z_0	Z_4/Z_0	Z_5/Z_0	Z_1/Z_0	Z_2/Z_0	Z_3/Z_0	Z_4/Z_0	Z_5/Z_0	Z_6/Z_0
1.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.5	1.0128	1.0790	1.2247	1.3902	1.4810	1.0064	1.0454	1.1496	1.3048	1.4349	1.4905
2.0	1.0220	1.1391	1.4142	1.7558	1.9569	1.0110	1.0790	1.2693	1.5757	1.8536	1.9782
3.0	1.0354	1.2300	1.7321	2.4390	2.8974	1.0176	1.1288	1.4599	2.0549	2.6577	2.9481
4.0	1.0452	1.2995	2.0000	3.0781	3.8270	1.0225	1.1661	1.6129	2.4800	3.4302	3.9120
6.0	1.0596	1.4055	2.4495	4.2689	5.6625	1.0296	1.2219	1.8573	3.2305	4.9104	5.8275
8.0	1.0703	1.4870	2.8284	5.3800	7.4745	1.0349	1.2640	2.0539	3.8950	6.3291	7.7302
10.0	1.0789	1.5541	3.1623	6.4346	9.2687	1.0392	1.2982	2.2215	4.5015	7.7030	9.6228

TABLE 5.2 Chebyshev Transformer Design

	$N=2$				$N=3$					
	$\Gamma_m = 0.05$		$\Gamma_m = 0.20$		$\Gamma_m = 0.05$			$\Gamma_m = 0.20$		
Z_L/Z_0	Z_1/Z_0	Z_2/Z_0	Z_1/Z_0	Z_2/Z_0	Z_1/Z_0	Z_2/Z_0	Z_3/Z_0	Z_1/Z_0	Z_2/Z_0	Z_3/Z_0
1.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.5	1.1347	1.3219	1.2247	1.2247	1.1029	1.2247	1.3601	1.2247	1.2247	1.2247
2.0	1.2193	1.6402	1.3161	1.5197	1.1475	1.4142	1.7429	1.2855	1.4142	1.5558
3.0	1.3494	2.2232	1.4565	2.0598	1.2171	1.7321	2.4649	1.3743	1.7321	2.1829
4.0	1.4500	2.7585	1.5651	2.5558	1.2662	2.0000	3.1591	1.4333	2.0000	2.7908
6.0	1.6047	3.7389	1.7321	3.4641	1.3383	2.4495	4.4833	1.5193	2.4495	3.9492
8.0	1.7244	4.6393	1.8612	4.2983	1.3944	2.8284	5.7372	1.5766	2.8284	5.0742
10.0	1.8233	5.4845	1.9680	5.0813	1.4385	3.1623	6.9517	1.6415	3.1623	6.0920

	$N=4$							
	$\Gamma_m = 0.05$				$\Gamma_m = 0.20$			
Z_L/Z_0	Z_1/Z_0	Z_2/Z_0	Z_3/Z_0	Z_4/Z_0	Z_1/Z_0	Z_2/Z_0	Z_3/Z_0	Z_4/Z_0
1.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.5	1.0892	1.1742	1.2775	1.3772	1.2247	1.2247	1.2247	1.2247
2.0	1.1201	1.2979	1.5409	1.7855	1.2727	1.3634	1.4669	1.5715
3.0	1.1586	1.4876	2.0167	2.5893	1.4879	1.5819	1.8965	2.0163
4.0	1.1906	1.6414	2.4369	3.3597	1.3692	1.7490	2.2870	2.9214
6.0	1.2290	1.8773	3.1961	4.8820	1.4415	2.0231	2.9657	4.1623
8.0	1.2583	2.0657	3.8728	6.3578	1.4914	2.2428	3.5670	5.3641
10.0	1.2832	2.2268	4.4907	7.7930	1.5163	2.4210	4.1305	6.5950