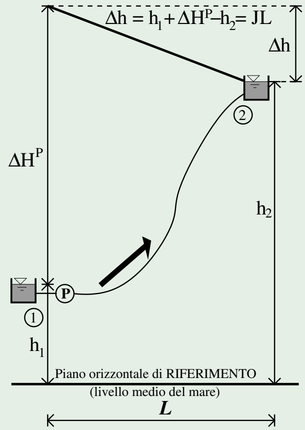
- Reti a diramazioni (aperte): tutte le **portate incognite** possono essere univocamente determinate dalle **equazioni di continuità**.
- Moto assolutamente turbolento ($\alpha = 2$ nell'equazione di Contessini).

- Orientamento delle condotte coincidente con il verso del moto dal nodo 1 al nodo 2 (quindi $\delta = +1$).
- Condotte a gravità o in sollevamento con funzione di solo trasporto:

$$h_{1,i} - h_{2,i} + w_i \Delta H_i^P = k_i L_i Q_i^2 D_i^{-n_i}$$

$$w_i = \begin{cases} 1 & \text{tratte in sollevamento} \\ 0 & \text{tratte a gravità} \end{cases}$$

ΔH_i^P = prevalenze delle pompe,
i = indice della condotta,
gli altri simboli sono già definiti.



Incognite ed equazioni

Indichiamo con L il numero di condotte, con N il numero di nodi interni, con S il numero di tratte in sollevamento (che per semplicità di formalismo saranno numerate per prime con indici $i = 1, \cdots, S$)

Le incognite nel problema del dimensionamento dell'adduzione

- L diametri incogniti D_i;
- N carichi piezometrici incogniti h_j ai nodi interni;
- S prevalenze incognite ΔH_i^P delle tratte con sollevamento.

Le equazioni disponibili

- L equazioni del moto di tipo $h_{1,i} - h_{2,i} + w_i \Delta H_i^P = k_i L_i Q_i^2 D_i^{-n_i}$
- $N + S$ equazioni che esprimono la condizione di **minima passività** (N scritte per i nodi interni, S per le condotte con sollevamento)

Costo annuo dell'impianto

Il **costo annuo** (o **passività** P) dell'impianto di adduzione si calcola come aliquota r del costo C necessario per la realizzazione delle opere:

$$P = rC \qquad\qquad r = r_A + r_I + r_M$$

dove l'aliquota r è composta da tre termini:

- r_A = tasso annuo di **ammortamento**; ipotizzando di rimborsare i costi a rate annuali con tasso di interesse i a decorrere dal completamento dell'opera per n anni si ricava $r_A = [(1+i)^n i] \,/\, [(1+i)^n - 1]$;
- r_I = aliquota per il costo degli **interessi** maturati durante la costruzione delle opere, sino a completa realizzazione e messa in servizio;
- r_M = aliquota per il costo della **manutenzione**.

Nel caso in cui le condotte abbiano diverse aliquote r_i di costo annuale, la passività annua si scrive come somma delle passività di tutte le condotte:

$$P = \sum_i^L r_i L_i C_i \qquad\qquad C_i = a_{0,i} + a_i D_i^{\epsilon_i} \qquad\qquad i = 1, \cdots, L$$

dove C_i è il costo di realizzazione (per unità di lunghezza) delle singole condotte i-esime, espresso in funzione del diametro D_i.

Il tasso di ammortamento

Il **tasso di ammortamento** r_A si calcola eguagliando il capitale maturato C_n dopo n anni (remunerando il costo di realizzazione C con tasso di interesse annuo i) al capitale maturato R_n dalle n rate R versate annualmente in n anni, remunerate con lo stesso tasso di interesse i.

$$C_n = C(1+i)^n$$

$$R_n = R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2} + \cdots + R(1+i) + R = R\sum_{k=0}^{n-1}(1+i)^k$$

Ricordiamo le proprietà della serie geometrica di ragione x:

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}$$

Posto $x = (1+i)$ ed eguagliando $R_n = C_n$ otteniamo il tasso r_A:

$$R\frac{1-(1+i)^n}{1-(1+i)} = C(1+i)^n \Longrightarrow R = \frac{(1+i)^n i}{(1+i)^n - 1}C \Longrightarrow r_A = \frac{(1+i)^n i}{(1+i)^n - 1}$$

Il costo annuo dell'energia per i sollevamenti

La potenza di una corrente è pari a $\gamma Q \Delta H$. Dividendo per il rendimento complessivo η e moltiplicando per il tempo T di funzionamento della pompa in un anno e per il costo unitario (es. costo del chilowattora) dell'energia c_e si ottiene il costo annuo dell'energia per il sollevamento **a portata costante**:

$$C_e = \frac{\gamma Q \Delta H^P T c_e}{\eta} \qquad\qquad C_e = \frac{9.81 Q \Delta H^P T c_{kWh}}{\eta}$$

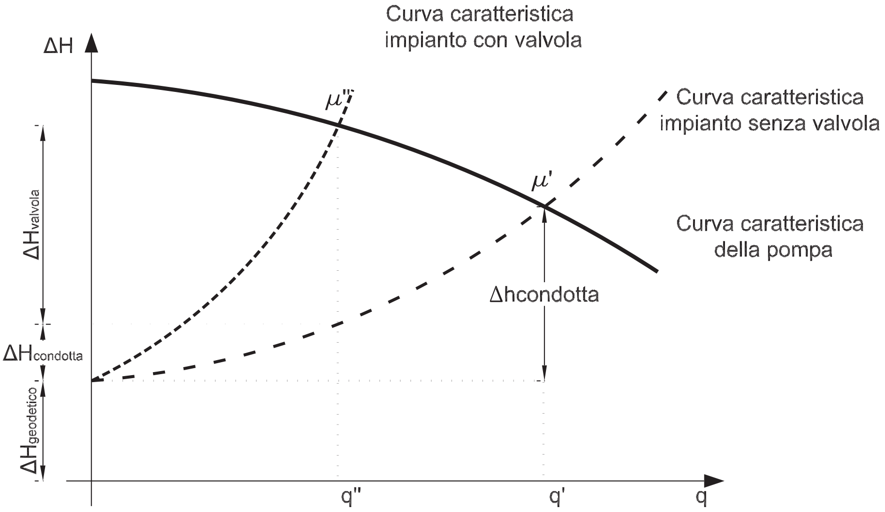
La formula empirica riportata a destra fornisce direttamente il costo annuo (in euro) per l'energia necessaria per i sollevamenti, quando si esprima la portata Q in m^3/s, la prevalenza ΔH^P in m, il tempo di funzionamento T in ore nell'anno, ed il costo unitario dell'energia c_{kWh} in euro/chilowattora.

Anche nel caso siano richieste delle **portate variabili** nel corso dell'anno, è comunque opportuno dimensionare la pompa per la massima portata $Q = q_g$ e farla **funzionare intermittentemente a portata costante**, per un tempo pari a $T = V_a/q_g$ in un anno (volume annuo diviso per la massima portata). Esprimendo il volume annuo V_a in m^3 e la portata q_g in m^3/s, il numero di ore di funzionamento in un anno si può calcolare dalla formula empirica:

$$T = V_a/(3600 q_g)$$

Confronto curve caratteristiche della pompa e dell'impianto

Curva caratteristica dell'impianto: $\Delta H_i = (h_{2,i} - h_{1,i}) + k_i L_i Q_i^2 D_i^{-n_i}$



L'espressione della passività

La somma degli oneri annui relativi al costo dell'impianto ed al costo dell'energia per i sollevamenti fornisce l'espressione della passività:

$$P = \sum_{i=1}^{L} r_i L_i \left(a_{0,i} + a_i D_i^{\epsilon_i} \right) + \sum_{i=1}^{S} \frac{\gamma Q_i T_i c_e}{\eta_i} \Delta H_i^P$$

Le incognite nell'espressione della passività:

Invertendo l'equazione del moto per la condotta i-esima otteniamo:

$$D_i = \left(\frac{k_i L_i Q_i^2}{h_{1,i} - h_{2,i} + w_i \Delta H_i^P} \right)^{1/n_i}$$

Fissati i carichi alla risorsa e nei serbatoi di consegna, la passività dipende solo dagli N carichi h_j ai nodi interni e dalle S prevalenze ΔH_i^P delle pompe:

$$P = P\left(h_1, h_2, \cdots, h_N, \Delta H_1^P, \Delta H_2^P, \cdots, \Delta H_S^P \right)$$

Le condizioni di minimo onere (minima passività) - I

Imponendo la condizione di minima passività si ottiene un sistema di $N + S$ equazioni che insieme alle L equazioni del moto rende determinato il problema del dimensionamento delle condotte:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial h_j} = \displaystyle\sum_{i=1}^{L} r_i L_i a_i \epsilon_i D_i^{\epsilon_i - 1} \dfrac{\partial D_i}{\partial h_j} = 0 & j = 1, \cdots, N \\ \dfrac{\partial P}{\partial \Delta H_i^P} = r_i L_i a_i \epsilon_i D_i^{\epsilon_i - 1} \dfrac{\partial D_i}{\partial \Delta H_i^P} + \dfrac{\gamma Q_i T_i c_e}{\eta_i} = 0 & i = 1, \cdots, S \end{cases}$$

Deriviamo le equazioni del moto per la condotta i rispetto ad h_j:

$$\frac{\partial \left(h_{1,i} - h_{2,i} + w_i \Delta H_i^P \right)}{\partial h_j} = \delta_{ij} = -n_i k_i L_i Q_i^2 D_i^{-n_i - 1} \frac{\partial D_i}{\partial h_j}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial D_i}{\partial h_j} = \frac{-\delta_{ij}}{n_i k_i L_i Q_i^2} D_i^{n_i + 1} \quad \text{dove } \delta_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{se } h_j \equiv h_{1,i} \\ -1 & \text{se } h_j \equiv h_{2,i} \\ 0 & \text{se } j \text{ non è nodo di } i \end{cases}$$

Le condizioni di minimo onere (minima passività) - II

Deriviamo le equazioni del moto per la condotta i rispetto a ΔH_i^P:

$$\frac{\partial\left(h_{1,i} - h_{2,i} + w_i \Delta H_i^P\right)}{\partial \Delta H_i^P} = w_i = -n_i k_i L_i Q_i^2 D_i^{-n_i-1} \frac{\partial D_i}{\partial \Delta H_i^P}$$

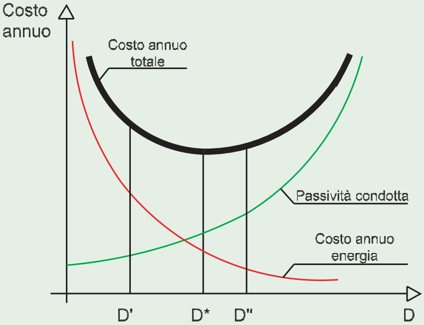
$$\Longrightarrow \frac{\partial D_i}{\partial \Delta H_i^P} = -\frac{1}{n_i k_i L_i Q_i^2} D_i^{n_i+1} \qquad i = 1, \cdots, S$$

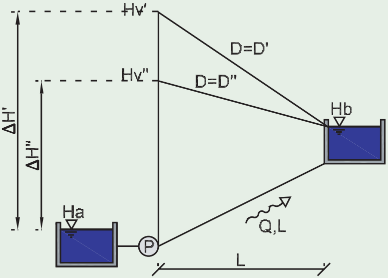
Sostituendo si ricavano le $N+S$ equazioni di minima passività

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{L} \delta_{ij} \frac{r_i a_i \epsilon_i}{n_i k_i Q_i^2} D_i^{n_i+\epsilon_i} = 0 & j = 1, \cdots, N \\ \displaystyle\frac{r_i a_i \epsilon_i}{n_i k_i Q_i^2} D_i^{n_i+\epsilon_i} = \frac{\gamma Q_i T_i c_e}{\eta_i} & i = 1, \cdots, S \end{cases}$$

Si osservi che ciascuna delle prime N equazioni si può scrivere eliminando il simbolo δ_{ij} ed eguagliando la sommatoria relativa alle condotte entranti nel nodo j alla sommatoria per le condotte uscenti dallo stesso nodo.

Le ultime S equazioni permettono di calcolare **immediatamente** i **diametri** D_i di ciascuna delle **tratte con sollevamento** $(i = 1, \cdots, S)$. Esse rappresentano la condizione di minimo onere rappresentata schematicamente nella seguente Figura, nella quale vengono confrontati i costi della condotta premente con i costi dell'energia necessaria al sollevamento al variare del diametro:





Considerazioni sulle tratte in sollevamento - II

Nel caso di tratte in sollevamento in cui si utilizzino materiali diversi a monte e a valle della pompa, i diametri D_1 (prima della pompa) e D_2 (premente) si ricavano immediatamente dalle relazioni:

$$\frac{r_1 a_1 \epsilon_1}{n_1 k_1 Q_1^2} D_1^{n_1+\epsilon_1} = \frac{r_2 a_2 \epsilon_2}{n_2 k_2 Q_2^2} D_2^{n_2+\epsilon_2} = \frac{\gamma Q_i T_i c_e}{\eta_i}$$

Infatti nessuna delle equazioni di minima passività dipende dalle lunghezze delle condotte, pertanto anche non conoscendo l'ubicazione della pompa possiamo disporre un nodo fittizio appena a monte della pompa, separando condotta di monte e premente.
L'equazione al nodo fornisce la prima eguaglianza, la seconda è fornita dall'equazione per la tratta in sollevamento.
La posizione della vasca di carico della pompa si determinerà successivamente confrontando le piezometriche con il profilo del terreno.

Riduzione del sistema di equazioni di minima passività

Dalle ultime S equazioni per le **condotte in sollevamento** ricaviamo i primi S diametri che sostituiamo nelle equazioni ai nodi:

$$\sum_{i=1}^{S} \delta_{ij} \frac{\gamma Q_i T_i c_e}{\eta_i} + \sum_{i=S+1}^{L} \delta_{ij} \frac{r_i a_i \epsilon_i}{n_i k_i Q_i^2} D_i^{n_i+\epsilon_i} = 0 \qquad j = 1, \cdots, N$$

Sostituiamo infine i diametri incogniti nella seconda sommatoria (solo **condotte a gravità**) ricavandoli formalmente dalle equazioni del moto:

Sistema ridotto di equazioni di minima passività
(N equazioni non lineari con N carichi incogniti h_j ai nodi interni)

$$\sum_{i=1}^{S} \delta_{ij} \frac{\gamma Q_i T_i c_e}{\eta_i} + \sum_{i=S+1}^{L} \delta_{ij} \frac{r_i a_i \epsilon_i}{n_i k_i Q_i^2} \left(\frac{k_i L_i Q_i^2}{h_{1,i} - h_{2,i}} \right)^{\frac{n_i+\epsilon_i}{n_i}} = 0 \quad j = 1, \cdots, N$$

$$\text{dove } \delta_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{se } h_j \equiv h_{1,i} \text{ (cioè } j \text{ è il nodo 1 della condotta } i\text{)} \\ -1 & \text{se } h_j \equiv h_{2,i} \text{ (cioè } j \text{ è il nodo 2 della condotta } i\text{)} \\ 0 & \text{se } j \text{ non è un nodo della condotta } i \end{cases}$$

Il metodo di Cross (bilanciamento dei costi) - I

Per semplicità di esposizione riscriviamo il sistema di equazioni:

$$\sum_{i=1}^{S} \delta_{ij}\theta_i + \sum_{i=S+1}^{L} \delta_{ij}\lambda_i \left(h_{1,i} - h_{2,i}\right)^{-\frac{n_i+\epsilon_i}{n_i}} = 0 \qquad j = 1, \cdots, N$$

avendo introdotto le costanti $\theta_i = \dfrac{\gamma Q_i T_i c_e}{\eta_i}$ e $\lambda_i = \dfrac{r_i a_i \epsilon_i}{n_i k_i Q_i^2} \left(k_i L_i Q_i^2\right)^{\frac{n_i+\epsilon_i}{n_i}}$

Si assume che i carichi h_j soluzione del problema si calcolino come somma di un carico arbitrario (ma coerente con le direzioni del moto) di tentativo h'_j e di una correzione dh_j. I carichi ai nodi di monte e valle di ciascuna condotta diventano: $h_{1,i} = h'_{1,i} + dh_{1,i}$ e $h_{2,i} = h'_{2,i} + dh_{2,i}$.

Sostituiamo $h_{1,i} - h_{2,i} = \left(h'_{1,i} - h'_{2,i}\right) + dh_{1,i} - dh_{2,i} = \Delta h'_i + dh_{1,i} - dh_{2,i}$:

$$\sum_{i=1}^{S} \delta_{ij}\theta_i + \sum_{i=S+1}^{L} \delta_{ij}\lambda_i \left(\Delta h'_i + dh_{1,i} - dh_{2,i}\right)^{-\frac{n_i+\epsilon_i}{n_i}} = 0 \qquad j = 1, \cdots, N$$

Il metodo di Cross (bilanciamento dei costi) - II

Prima approssimazione del sistema

Nella j-esima equazione, ottenuta dalla derivata $\dfrac{\partial P}{\partial h_j}$ per il nodo j-esimo, si considera solo la correzione dh_j, trascurando tutte le altre correzioni:

$$\sum_{i=1}^{S} \delta_{ij}\theta_i + \sum_{i=S+1}^{L} \delta_{ij}\lambda_i \left(\Delta h'_i + \delta_{ij} dh_j\right)^{-\frac{n_i+\epsilon_i}{n_i}} = 0 \qquad j = 1, \cdots, N$$

In questo modo ciascuna equazione ha una sola incognita: $f_j(dh_j) = 0$

Seconda approssimazione del sistema

Si linearizzano le equazioni con uno sviluppo in serie al primo ordine:

$$f_j(dh_j) = f_j(dh_j = 0) + \left.\frac{\partial f_j}{\partial dh_j}\right|_{dh_j=0} dh_j \quad \Longrightarrow \quad dh_j = -\frac{f_j(dh_j = 0)}{\left.\frac{\partial f_j}{\partial dh_j}\right|_{dh_j=0}}$$

Il metodo di Cross (bilanciamento dei costi) - III

$$\frac{\partial f_j}{\partial dh_j} = \sum_{i=S+1}^{L} -\frac{n_i+\epsilon_i}{n_i}(\delta_{ij})^2\lambda_i\left(\Delta h'_i + \delta_{ij} dh_j\right)^{-\frac{n_i+\epsilon_i}{n_i}-1}$$

Le correzioni ai nodi j

Calcolando la $f_j(dh_j)$ e la sua derivata per $dh_j = 0$ e sostituendo nello sviluppo in serie si ottengono le correzioni ai nodi.

$$dh_j = \frac{\sum_{i=1}^{S}\delta_{ij}\theta_i + \sum_{i=S+1}^{L}\delta_{ij}\lambda_i\left(\Delta h'_i\right)^{-\frac{n_i+\epsilon_i}{n_i}}}{\sum_{i=S+1}^{L}\frac{n_i+\epsilon_i}{n_i}(\delta_{ij})^2\lambda_i\left(\Delta h'_i\right)^{-\frac{2n_i+\epsilon_i}{n_i}}} \qquad j = 1, \cdots, N$$

Usando le unità del S.I.: $\theta_i = \dfrac{9.81 Q_i T_i c_{kWh}}{\eta_i}$ e $\lambda_i = \dfrac{r_i a_i \epsilon_i}{n_i k_i Q_i^2}\left(k_i L_i Q_i^2\right)^{\frac{n_i+\epsilon_i}{n_i}}$

Il processo si ripete iterativamente: al passo successivo i carichi appena corretti vengono considerati come carichi di tentativo. Il processo si può interrompere con un criterio di convergenza sui carichi ai nodi.

I carichi h_j su tutti i nodi sono determinati quando il sistema delle N equazioni del metodo di Cross giunge a convergenza.
Restano da utilizzare le S equazioni di minima passività ottenute per le condotte con sollevamento e tutte le L equazioni del moto.

- Per le tratte con sollevamento ($i = 1, \cdots, S$) si ricava il diametro dalle equazioni di minima passività e la prevalenza dalle equazioni del moto:

$$D_i = \left(\frac{\gamma Q_i T_i c_e}{\eta_i} \frac{n_i k_i Q_i^2}{r_i a_i \epsilon_i} \right)^{\frac{1}{n_i + \epsilon_i}}$$

$$\Delta H_i^P = (h_{2,i} - h_{1,i}) + k_i L_i Q_i^2 D_i^{-n_i}$$

- I diametri D_i nelle tratte a gravità ($i = S+1, \cdots, L$) si possono determinare dalle rimanenti equazioni del moto:

$$D_i = \left(\frac{k_i L_i Q_i^2}{h_{1,i} - h_{2,i}} \right)^{1/n_i}$$

Diametri commerciali

Si procedere da monte verso valle assegnando il diametro commerciale più prossimo a quello teorico, riservandosi eventualmente di usare coppie di diametri immediatamente più grande e più piccolo di quello teorico nei tratti terminali, calcolando le lunghezze dal seguente sistema:

$$\begin{cases} L = L_1 + L_2 \\ \Delta h = J_1 L_1 + J_2 L_2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \qquad \begin{cases} L_1 = (\Delta h - J_2 L)/(J_1 - J_2) \\ L_2 = (\Delta h - J_1 L)/(J_2 - J_1) \end{cases}$$

Se si adottano due diametri sulla singola tratta è buona regola disporre il diametro più grande a monte per mantenere alta la piezometrica.

Infine, nella assegnazione dei diametri commerciali è anche opportuno cercare di minimizzare il numero di diametri utilizzati per contenere i pezzi speciali ed i ricambi che devono essere tenuti disponibili per le manutenzioni e gli interventi di urgenza.

Verifiche

In ciascuna tratta sono stati assegnati i diametri commerciali e sono note le portate nel giorno di massimo consumo (dalle equazioni di continuità).

Diventano **incogniti i carichi piezometrici** h_j **ai nodi interni ed ai nodi dei serbatoi/punti di consegna**, avendo cambiato i diametri.
Si utilizzano le L **equazioni del moto** per determinare i carichi piezometrici incogniti procedendo dall'opera di presa verso i serbatoi cittadini.

Verifiche sulle piezometriche e sulle velocità

- La linea piezometrica deve essere almeno due metri sopra la quota terreno
- Nei serbatoi e nelle vasche lungo linea la piezometrica deve essere almeno pari alle quote di consegna (massimo livello)
- Si verificano le massime pressioni nelle condotte.
- Le velocità devono essere comprese fra 0.5 e 2 m/s.
  Valori piccoli possono compromettere le caratteristiche organolettiche dell'acqua (tempi di percorrenza troppo elevati), valori troppo grandi provocano vibrazioni ed eccessive sollecitazioni ai giunti e pezzi speciali.

Se necessario si rivede il tracciato e si cambiano i diametri.
Infine si dispongono le valvole regolatrici di pressione.