Idraulica delle correnti: definizioni

Assumiamo un asse z verticale, positivo verso l'alto, avente origine su un piano di riferimento orizzontale (nei calcoli per gli acquedotti si assume come riferimento il livello medio del mare).

Per una sezione di corrente con traiettorie sensibilmente parallele (correnti gradualmente variate) definiamo:

$h = z + p/\gamma$	= carico piezometrico	[L]
$H = z + p/\gamma + \frac{U^2}{2g}$	= carico totale	[L]

z	= quota	= energia di posizione (potenziale) per unità di peso
p/γ	= altezza piezometrica	= energia di pressione per unità di peso
$U^2/(2g)$	= altezza cinetica	= energia cinetica per unità di peso

Q = portata della corrente attraverso una sezione regolare Ω

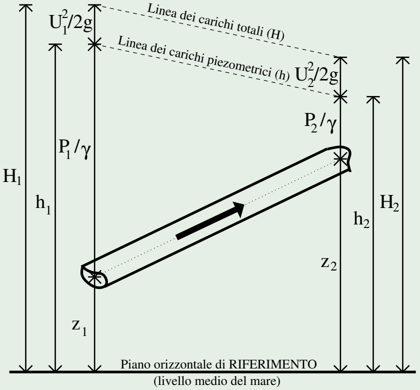
$U = Q/\Omega$ = velocità media della corrente

Nota: si è approssimato a 1 il coefficiente di ragguaglio per l'energia cinetica.

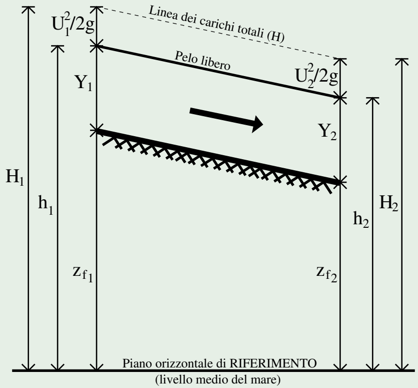
altezza piezometrica $\neq$ carico piezometrico

Correnti in pressione e a pelo libero

Corrente in pressione



Corrente a pelo libero



Lunghe condotte: ipotesi

- Si confonde la lunghezza effettiva delle condotte con la lunghezza della sua proiezione orizzontale
- Si trascurano tutte le perdite di carico concentrate, si considerano solo le perdite di carico distribuite
- Si trascura l'altezza cinetica della corrente $\frac{U^2}{2g}$: si confonde la linea dei carichi totali con la linea dei carichi piezometrici ($H \equiv h$)

Condizioni di moto nelle condotte

Si considera sempre il moto permanente ($\partial/\partial t = 0$).
Spesso si assume anche *uniforme*: velocità (medie temporali U, se il moto è turbolento) indipendenti dalla coordinata spaziale nella direzione del moto.
Talvolta è *gradualmente variato* (es. condotte con distribuzione uniforme).

Si considera in ogni caso il moto dell'acqua (incomprimibile) in tratti di condotta indeformabile a sezione Ω costante, perciò il rapporto Q/U risulta costante: quindi valgono leggi di proporzionalità tipo $J \propto U^\alpha \Rightarrow J \propto Q^\alpha$ e viceversa.

Equazione del moto e perdite di carico distribuite

L'equazione del moto esprime la variaz. di carico totale per unità di lunghezza della condotta. Assumiamo per le ip. di lunghe condotte $H \cong h$ e l'asse x orizzontale con direzione-verso ottenuti dalla proiez. della velocità in condotta:

$$\frac{dh}{dx} = -J \qquad J \geq 0 \qquad \frac{dh}{dx} \leq 0$$

Il carico piezometrico diminuisce sempre nel verso del moto.

La formula più generale per J (**perdita di carico distribuita** o **pendenza motrice** o **cadente**) è quella di Darcy-Weisbach:

$$J = \frac{\lambda}{D}\frac{U^2}{2g} \qquad J \geq 0$$

il *coefficiente d'attrito* (o *di resistenza*) λ adimensionale è funzione del numero di Reynolds $R_e = (\rho U D)/\mu$ (dipendenza di λ dalla velocità) e di uno o più parametri di scabrezza r_s, ad es. ϵ/D nell'abaco di Moody:

$$\lambda = \lambda(R_e, \frac{\epsilon}{D})$$

Regimi di moto di scarso interesse per gli acquedotti ($R_e < 3500$)

$R_e < 2000 \div 2500$: Regime laminare

Si ricava una espressione esatta per λ (equivalente alla legge di Hagen-Poiseuille $U = \frac{1}{8\pi}\frac{\gamma\Omega}{\mu}J$):

$$\lambda = \frac{64}{R_e} \qquad\qquad J \propto U$$

$2000 \div 2500 < R_e < 3500$: Zona critica

É caratterizzata da regime di moto instabile, la legge di resistenza non è ben definita.

Regimi di moto di interesse per gli acquedotti ($R_e > 3500$)

Formula di Colebrook-White

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{2.51}{R_e \sqrt{\lambda}} + \frac{\epsilon}{3.71 D} \right) \qquad (1)$$

All'aumentare del rapporto fra il secondo e il primo termine della somma ($\frac{\epsilon}{D} \cdot R_e \sqrt{\lambda} = \frac{\epsilon U}{\nu} \sqrt{\lambda}$), si verificano i seguenti regimi di moto:

Regime di moto	$\frac{\epsilon}{D} \cdot R_e \sqrt{\lambda}$	appross. (1)	λ	α
tubo liscio	< 14	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \approx -2 \log \left(\frac{2.51}{R_e \sqrt{\lambda}} \right)$	$\lambda(R_e)$	$1.75 \div 1.8$
transizione	$14 \div 200$	eq. (1) completa	$\lambda(R_e, \frac{\epsilon}{D})$	$1.8 \div 1.9$
assol. turb.	> 200	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \approx -2 \log \left(\frac{\epsilon}{3.71 D} \right)$	$\lambda(\frac{\epsilon}{D})$	2

I valori per l'esponente α che esprime le proporzionalità $J \propto U^{\alpha}$ e $J \propto Q^{\alpha}$ si riferiscono a formule pratiche. α caratterizza il regime di moto.

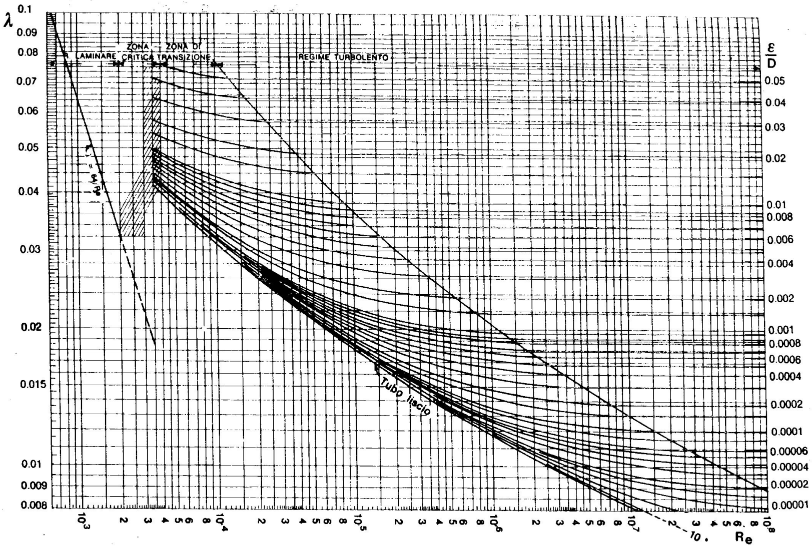


Fig. 5.1 Abaco di Moody.

Espressioni pratiche per moto assolutamente turbolento

Formula di Chézy

Proposta per il moto uniforme nei canali, viene utilizzata anche per il moto assolutamente turbolento ($\alpha = 2$) nelle condotte in pressione:

$$U = \chi\sqrt{RJ} \qquad \Longrightarrow \qquad J = \frac{U^2}{\chi^2 R}$$

Espressioni utilizzate per il *coefficiente di resistenza dimensionale* χ

$$\chi = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}} \quad \textbf{(Bazin)} \qquad \chi = \frac{100}{1 + \frac{m}{\sqrt{R}}} \quad \textbf{(Kutter)}$$

$$\chi = k_s R^{1/6} \quad \textbf{(Gauckler-Strickler)} \qquad \chi = \frac{1}{n} R^{1/6} \quad \textbf{(Manning)}$$

Scabrezze γ, m, k_s, n in tabelle: unità di tutte le grandezze in metri e secondi
R = raggio idraulico (per condotte circolari di diametro D: $R = D/4$)

Legame con la formula di Darcy-Weisbach: $\chi = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}}$

Coefficienti di scabrezza delle tubazioni

Tab. 5.1 Valori dei coefficienti di scabrezza delle tubazioni

Tipo di Tubazione	ε (mm)	γ ($m^{1/2}$)	m ($m^{1/2}$)	k $m^{1/3} \cdot s^{-1}$
1-Tubazioni tecnicamente lisce (vetro, ottone, rame, trafilato, vetroresina, materiali plastici) (a seconda delle condizioni di servizio)	0-0,02			
2-Tubazioni d'acciaio				
a) Nuove				
Grezze non saldate	0,03-0,06			130-115
Grezze saldate (produzione di serie)	0,03-0,08			130-110
Nuove con rivestimenti degradabili nel tempo:				
verniciati per centrifugazione	0,02-0,05			140-120
bitumati per immersione	0,10-0,15	$\leq 0,06$	$\leq 0,12$	100
con asfalto o catrame applicati a mano	0,5-0,6	0,16	0,20-0,25	85-80
b) In servizio, grezze o con rivestimenti degradabili:				
con leggera ruggine	0,6-0,8	0,18	0,25	80-90
con tubercolizzazione diffusa	1-4	0,23	0,30-0,35	75-70
c) Con trattamenti o rivestimenti non degradabili nel tempo (a seconda delle condizioni di servizio)				
zincati	0,02-0,05			140-120
galvanizzati	0,015-0,03			140-130
Rivestimento bituminoso a spessore	0,015-0,04			140-125
Rivestimento cementizio applicato per centrifugazione	0,05-0,15	<0,06	<0,12	120-100
3-Tubazioni in ghisa				
a) Nuove				
grezze	0,2-0,4	0,10	0,12	90-85
rivestite internamente con bitume (rivestimento degradabile)	0,10-0,20	0,10	0,12	90
b) In servizio, grezze o con rivestimenti degradabili				
con lievi incrostazioni	'0,4-1,0	0,16	0,20	85-75
parzialmente arrugginite	1,0-2,0	0,23	0,30-0,35	75-70
con forti incrostazioni	3-5	0,36	0,4	65
c) Con rivestimenti non degradabili nel tempo				
cemento applicato per centrifugazione	0,05-0,15	<0,06	<0,12	120-100
4-Tubazioni in cemento				
cemento amianto (nuovi)	0,03-0,10	<0,06	<0,12	130-105
in servizio	0,10-0,4	0,10	0,12	105-85
cemento armato con intonaco perfettamente liscio, nuove	0,10-0,15	0,06	0,12	100
come sopra, in servizio da più anni	1-3	0,23	0,30-0,35	75-70
gallerie con intonaco di cemento, a seconda del grado di finitura e delle condizioni di servizio	1-10	0,23-0,36	0,30-0,45	70-60

Espressione di Contessini per le perdite distribuite

Spesso nella progettazione degli acquedotti viene utilizzata una espressione monomia (proposta da *Contessini*) per le perdite di carico:

$$J = k\frac{Q^\alpha}{D^n}$$

Il parametro α caratterizza il regime di moto

Regime laminare	$\alpha = 1$
Regime di tubo liscio	$\alpha \in [1.75 \div 1.8]$
Regime di transizione	$\alpha \in [1.8 \div 1.9]$
Regime assolutamente turbolento	$\alpha = 2$

I parametri k ed n dipendono dalla scabrezza della condotta

Per la semplicità nelle derivazioni ed integrazioni analitiche, la formula di Contessini viene spesso preferita alla formula di Colebrook-White.

Espressione di Contessini per moto turbolento ($\alpha = 2$): derivazione di k e n da altre formule

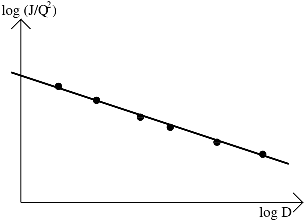
Tubazione di cui siano noti e **assegnati** i coefficienti di scabrezza, ad esempio per le formule di Colebrook-White (ϵ), o di Bazin(γ), o di Kutter (m).

Darcy-Weisbach $$\frac{J}{Q^2} = \frac{\lambda}{\Omega^2 D 2g} = f(D, \epsilon) = f(D) \qquad \lambda = \lambda(\frac{\epsilon}{D})$$

Chézy $$\frac{J}{Q^2} = \frac{1}{\Omega^2 \chi^2 R} = f(D, r_s) = f(D) \qquad r_s = \gamma, m$$

Contessini $$\frac{J}{Q^2} = kD^{-n}$$

$$\Longrightarrow \log \frac{J}{Q^2} = \log k - n \log D$$



Per alcuni diametri D_i si calcola $(J/Q^2)_i$ con Darcy-Weisbach/Chézy: da best-fit su diagramma bilogaritmico si ricava intercetta ($\log k$) e pendenza ($-n$)

Espressione di Contessini per moto turbolento ($\alpha = 2$): valori di k, n per alcune scabrezze Kutter e Bazin

Contessini: $$J = k\frac{Q^\alpha}{D^n}$$

Moto assolutamente turbolento: $\alpha = 2$

scabrezza di origine	k	n
Kutter: $m = 0.175$	0.0012	5.26
Kutter: $m = 0.275$	0.0016	5.36
Kutter: $m = 0.375$	0.0020	5.44
Bazin: $\gamma = 0.10$	0.00127	5.14
Bazin: $\gamma = 0.16$	0.00150	5.29
Bazin: $\gamma = 0.18$	0.00160	5.30
Bazin: $\gamma = 0.20$	0.00170	5.34
Bazin: $\gamma = 0.23$	0.00190	5.32

Per il funzionamento dell'acquedotto al termine della durata tecnico-economica si deve fare riferimento alle **scabrezze delle condotte in servizio**.

Perdite di carico: condotte con funzione di solo trasporto

$$\frac{dh}{dx} = -J \qquad - dh = Jdx \qquad J = k\frac{Q^\alpha}{D^n} = cost$$

Fissiamo **sempre** un **orientamento** della condotta **dalla estremità 1 alla 2**.

A) Moto da sez 1 a 2 *(Fig. 1a)*. Integrale da $x = 0$ (sez 1) a $x = L$ (sez 2):

$$-\int_{h_1}^{h_2} dh = \int_{h_2}^{h_1} dh = h_1 - h_2 = \int_0^L Jdx = LJ = Lk\frac{Q^\alpha}{D^n}$$

B) Moto da sez 2 a 1 *(Fig. 1b)*. Integrale da $x = 0$ (sez 2) a $x = L$ (sez 1).

Si ottiene l'espressione generale:

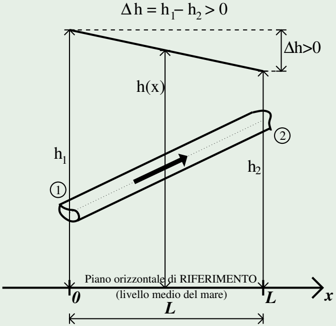
$$\Delta h = h_1 - h_2 = \delta Lk\frac{Q^\alpha}{D^n}$$

$\delta = +1$: moto $1 \longrightarrow 2$ (caso A)
$\delta = -1$: moto $1 \longleftarrow 2$ (caso B)

La portata Q non contribuisce al segno perché è sempre positiva.

Condotte con funzione di solo trasporto: due casi

Figura 1a

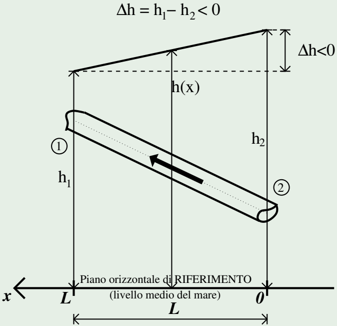


Moto diretto dall'estremo 1 al 2.

$$\Delta h = h_1 - h_2 = Lk\frac{Q^\alpha}{D^n}$$

$$\frac{dh}{dx} = cost$$

Figura 1b



Moto diretto dall'estremo 2 al 1.

$$\Delta h = h_1 - h_2 = -Lk\frac{Q^\alpha}{D^n}$$

Nota: il verso dell'asse delle x è sempre concorde al verso del moto.

Perdite di carico: condotte con funzione di distribuzione

Portata distribuita uniformemente per unità di lunghezza di condotta: p

Portata totale distribuita da una condotta lunga L: $P = pL$

Fissiamo **sempre** un **orientamento** della condotta **dalla estremità 1 alla 2**.

Indichiamo con Q_1 e Q_2 le portate *(positive)* alle estremità 1 e 2

Condotta senza sezione neutra, moto sempre da sez 1 a 2 *(Fig. 2a)*.

Integrale da $x = 0$ (sez 1) a $x = L$ (sez 2):

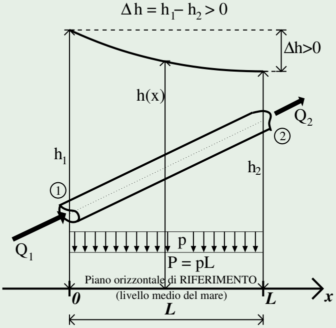
$$Q(x) = Q_1 - px \qquad dQ = -pdx \qquad J(x) = k\frac{Q(x)^\alpha}{D^n} \neq cost$$

$$h_1 - h_2 = \int_0^L J(x)dx = \int_0^L k\frac{Q(x)^\alpha}{D^n}dx = -\int_{Q_1}^{Q_2} k\frac{Q(x)^\alpha}{D^n}\frac{1}{p}dQ$$

$$\Delta h = h_1 - h_2 = \frac{kL}{D^n P}\frac{1}{(\alpha+1)}(Q_1^{\alpha+1} - Q_2^{\alpha+1})$$

Si ottiene la stessa equazione nel caso il moto sia diretto da sez. 2 a 1 (Fig. 2b) e per distributrici con sezione neutra (Figure 3a, 3b, 3c); l'equazione è indipendente dai versi effettivi del moto nelle due estremità 1 e 2.

Figura 2a

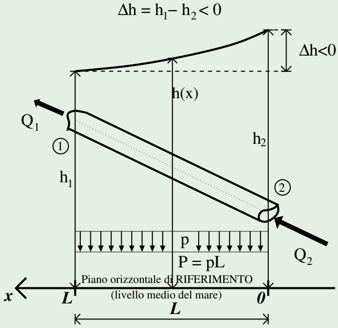


Moto diretto dall'estremo 1 al 2.

$Q_1 > Q_2 \rightarrow \Delta h > 0$

$$\frac{dh}{dx} \neq cost$$

Figura 2b



Moto diretto dall'estremo 2 al 1.

$Q_1 < Q_2 \rightarrow \Delta h < 0$

Stessa equazione per Δh: il segno cambia in relazione a $Q_1 \lesseqgtr Q_2$.

$$\Delta h = h_1 - h_2 = \frac{kL}{D^n P} \frac{1}{(\alpha + 1)} (Q_1^{\alpha+1} - Q_2^{\alpha+1})$$

Traccia per il calcolo del Δh

Posizione della sezione neutra:

$L_1 = Q_1/p$; $L_2 = Q_2/p \Longrightarrow$

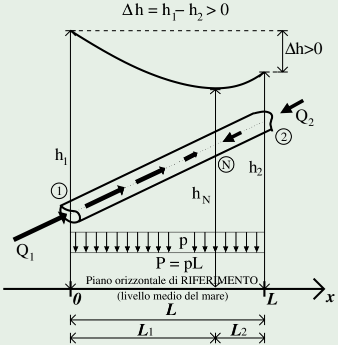
$\Longrightarrow L_1/L_2 = Q_1/Q_2$

$$h_1 - h_N = \frac{k}{D^n p}\frac{1}{(\alpha+1)}(Q_1^{\alpha+1} - 0)$$

$$h_2 - h_N = \frac{k}{D^n p}\frac{1}{(\alpha+1)}(Q_2^{\alpha+1} - 0)$$

La differenza di carico Δh si ricava sottraendo le due equazioni.

Figura 3a (sez. neutra a destra)

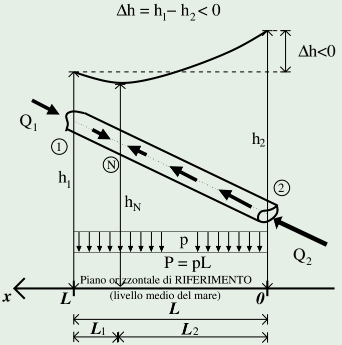


$Q_1 > Q_2 \rightarrow \Delta h > 0$

Stessa equazione per Δh: il segno cambia in relazione a $Q_1 \lesseqgtr Q_2$.

$$\Delta h = h_1 - h_2 = \frac{kL}{D^n P}\frac{1}{(\alpha+1)}(Q_1^{\alpha+1} - Q_2^{\alpha+1})$$

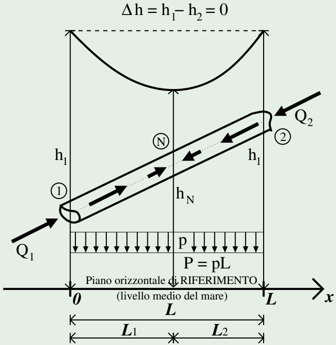
Figura 3b (sez. neutra a sinistra)



$$Q_1 < Q_2 \rightarrow \Delta h < 0$$

$$\frac{dh}{dx} \neq cost$$

Figura 3c (sez. neutra al centro)



$$Q_1 = Q_2 \rightarrow \Delta h = 0$$

Stessa equazione per Δh: il segno cambia in relazione a $Q_1 \lesseqgtr Q_2$.

$$\Delta h = h_1 - h_2 = \frac{kL}{D^n P} \frac{1}{(\alpha + 1)} \left(Q_1^{\alpha+1} - Q_2^{\alpha+1} \right)$$

Le equazioni di continuità

Equazioni di continuità ai nodi

$$\sum Q^u = 0$$

Q^u = portata uscente dal nodo con segno (es. + se uscente dal nodo)

Equazioni di continuità per le condotte di distribuzione

$$Q_1 + Q_2 = P$$

Q_1 = portata al nodo 1 (con segno, es + se entrante in condotta)
Q_2 = portata al nodo 2 (con segno, es + se entrante in condotta)
P = portata distribuita complessivamente dalla condotta (> 0)

NOTA: la portata è positiva per definizione,
tuttavia per scrivere le equazioni di continuità in forma compatta
sono state introdotte sopra delle convenzioni sul segno.
Le equazioni del moto continuano invece ad essere valide con le portate positive
(quindi espresse in modulo, se si è introdotto il segno).

Le equazioni disponibili dall'idraulica: $L + N + Ld$

L (= numero totale di condotte) **equazioni del moto**:

$$h_{1,i} - h_{2,i} = \begin{cases} \delta_i L_i k_i \dfrac{Q_i^{\alpha_i}}{D_i^{n_i}} & \text{solo trasporto} \\ \dfrac{k_i L_i}{D_i^{n_i} P_i} \dfrac{1}{(\alpha_i + 1)} \left(Q_{1,i}^{\alpha_i+1} - Q_{2,i}^{\alpha_i+1} \right) & \text{distribuzione} \end{cases} \qquad i = 1, \cdots, L$$

$\delta_i = +1$ per moto $1 \longrightarrow 2$, $\delta_i = -1$ per moto $1 \longleftarrow 2$

N (= numero totale di nodi) **equazioni di continuità ai nodi**:

$$\sum_i Q_{j,i} = 0 \qquad j = 1, \cdots, N$$

sommatoria estesa a tutte le condotte i aventi un estremo nel nodo j.

Ld (= numero condotte distribuzione) **equazioni continuità nelle condotte**:

$$Q_{1,i} + Q_{2,i} = P_i \qquad i = 1, \cdots, Ld$$

Nelle equazioni di continuità le portate hanno segno + se entranti in condotta.