# Università di Cagliari

## Corso di Laurea in Matematica

**Prova scritta di Geometria 1**

3 Febbraio 2017

**Esercizio 1**

Sia $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2 ad entrate reali.

a) Dimostra che il sottoinsieme W di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dato da

$$W = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : A = A^t\}$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b) Dimostra che $B_1 = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ è una base di $W$

c) Detta $f: W \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'applicazione lineare la cui matrice associata rispetto alle basi $B_1$ e $B$ è la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

trova $f\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

d) $f$ è suriettiva? Giustificare la risposta.

**Esercizio 2**

Sia $f_k: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice associata, rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$, è

$$\begin{pmatrix} k & k & 2k & k \\ k & 0 & k-1 & k \\ 0 & k & k+2 & 0 \end{pmatrix},$$

dove $k$ è un parametro reale. Trovare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, una base di $\ker(f_k)$.

**Esercizio 3**

Sia $f: V \longrightarrow V$ l'endomorfismo dello spazio vettoriale

$$V = L\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

tale che

$$f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Trovare gli autovalori e gli autospazi di $f$. Stabilire se $f$ è diagonalizzabile e, in caso affermativo, si trovi una base di $V$ formata da autovettori di $f$.