Metodi statistici per l'analisi dei dati

2^k Factorial design

1

2^k Factorial design – Introduzione

2^k Factorial designs

- I **Factorial Designs** sono ampiamente usati negli esperimenti per studiare l'effetto **congiunto** di diversi fattori sulla risposta di un dato processo.
- Un caso particolare di disegno fattoriale è quello di *k* fattori, ciascuno dei quali investigato solo a 2 livelli.
  - Di seguito ci riferiremo ai due distinti livelli con i nomi di "**low**" and "**high**".
- i livelli possono essere sia **quantitativi** (temperatura, pressione, concentrazione etc.), che **qualitativi** (diverse macchine, operatori, etc).
- Una campagna sperimentale completa richiede quindi l'esplorazione di $2 \times 2 \times \ldots 2 = 2^k$ distinti livelli dei fattori.
- Da qui la definizione di **2^k factorial design**.

2

2^k Factorial design – Introduzione

2^k Factorial designs

- I 2^k Factorial designs sono particolarmente utili nelle prime fasi di un lavoro sperimentale.
- Garantiscono il numero **minimo** di esperienze utili per valutare in modo completo **tutti** i potenziali fattori che sono ritenuti potenzialmente influenzare il processo
- Esperimenti di **screening** dei fattori.
- Dato che ci sono solo due livelli per fattore si assume che la risposta sia approssimativamente **lineare** nell'intervallo di valori investigato.

2^2 Factorial design – Introduzione e definizioni

2^k Factorial designs

- Caso in cui ci siano solo due fattori da investigare.
- Esempio:
- Studiare l'effetto della **concentrazione del reagente (fattore A)** e della **quantità di catalizzatore (fattore B)** sulla resa di un processo chimico.
- Ogni esperimento è replicato tre volte.
- Ovviamente, l'ordine di esecuzione delle prove sperimentali è sempre stabilito in modo casuale.

2^2 Factorial design – Introduzione e definizioni

2^k Factorial designs

- In tabella sono riportate tutte le combinazioni possibili degli esperimenti con la nomenclatura relativa

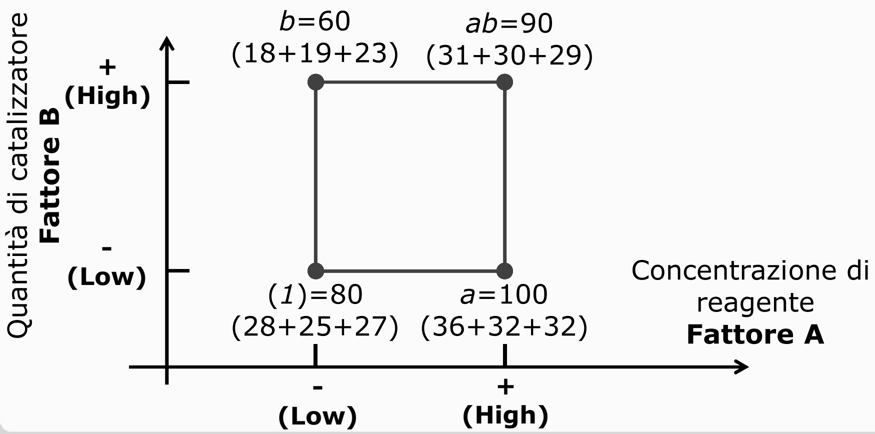
Fattore A	Fattore B	Combinazione dei trattamenti	Repliche I	Repliche II	Repliche III	Totale
-	-	*A basso, B basso*	28	25	27	**80**
+	-	*A alto, B basso*	36	32	32	**100**
-	+	*A basso, B alto*	18	19	23	**60**
+	+	*A alto, B alto*	31	30	29	**90**

5

2^2 Factorial design – Introduzione e definizioni

2^k Factorial designs

- Rappresentazione grafica dei trattamenti



6

2^2 Factorial design – Introduzione e definizioni

2^k Factorial designs

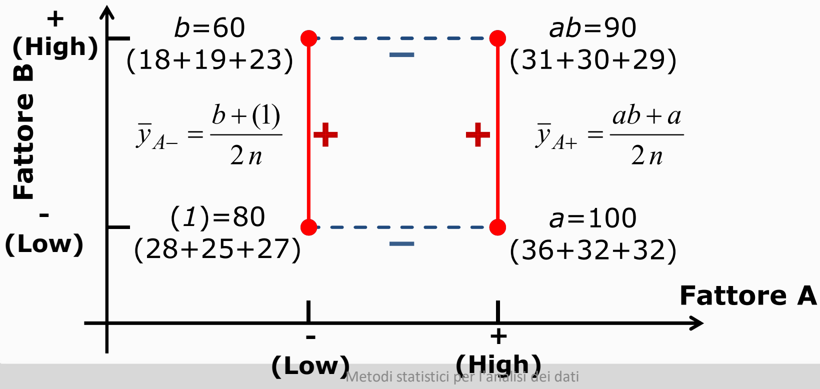
- Nomenclatura utilizzata nella figura:
  - il livello "alto" di ciascun fattore è indicato dalla corrispondente lettera in minuscolo
  - il livello "basso" è caratterizzato dall'assenza della lettera corrispondente.
- Quindi:
  - "**a**" rappresenta la combinazione: alto livello fattore A, basso livello fattore B
  - "**b**": basso livello fattore A, alto livello fattore B
  - "**ab**": alto livello fattore A, alto livello fattore B
  - Per convenzione, la combinazione corrispondente a tutti i livelli bassi dei fattori è indicata con il simbolo "**(1)**"

7

2^2 Factorial design – Introduzione e definizioni

2^k Factorial designs

- **Calcolo degli effetti – L'effetto di A** può essere calcolato come la **differenza** tra la **media** di tutte le risposte sul lato **destro (A alti)** del quadrato e la **media** delle risposte sul lato **sinistro (A bassi)**



8

2^2 Factorial design – Introduzione e definizioni

2^k Factorial designs

- Calcolo degli effetti – **Effetto del fattore A**
- È possibile quindi calcolare:

$$A = \bar{y}_{A+} - \bar{y}_{A-} = \frac{ab+a}{2n} - \frac{b+(1)}{2n} = \frac{1}{2n}\left[ab + a - b - (1)\right]$$

- Per il caso in esame:

$$A = \frac{1}{2(3)}\left[90 + 100 - 60 - 80\right] = 8.33$$

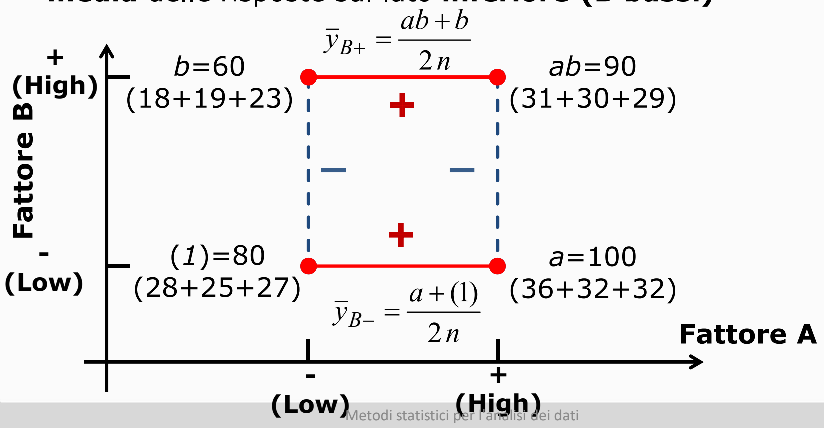
- Effetto A positivo:
  - Un aumento della concentrazione implica un aumento della resa del processo

9

2^2 Factorial design – Introduzione e definizioni

2^k Factorial designs

- Per **l'effetto di B** il discorso è analogo**: differenza** tra la **media** di tutte le risposte sul lato **superiore (B alti)** del quadrato e la **media** delle risposte sul lato **inferiore (B bassi)**



10

2^2 Factorial design – Introduzione e definizioni

2^k Factorial designs

- Calcolo degli effetti – **Effetto del fattore B**
- È possibile quindi calcolare:

$$B = \bar{y}_{B+} - \bar{y}_{B-} = \frac{ab+b}{2n} - \frac{a+(1)}{2n} = \frac{1}{2n}\left[ab+b-a-(1)\right]$$

- Per il caso in esame:

$$B = \frac{1}{2(3)}\left[90+60-100-80\right] = -5.00$$

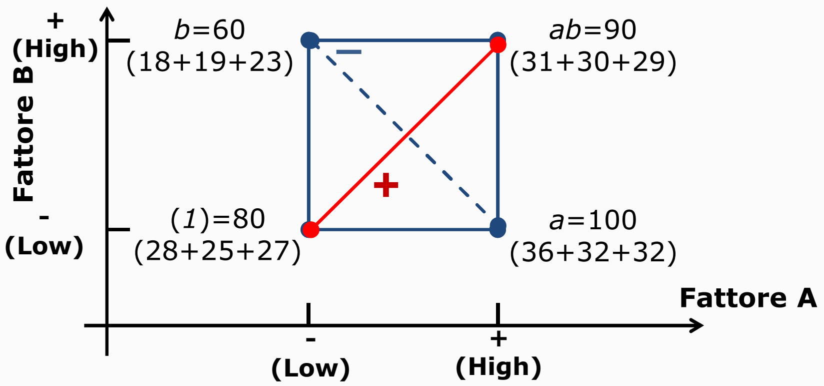
- Effetto B negativo:
  - Aumentare la quantità di catalizzatore porta ad una diminuzione della resa

11

2^2 Factorial design – Introduzione e definizioni

2^k Factorial designs

- Per le interazioni è necessario fare la differenza dei termini sulle diagonali



12

2^2 Factorial design – Introduzione e definizioni

2^k Factorial designs

- Calcolo degli effetti – **Fattore di interazione B**

$$AB = \frac{ab+(1)}{2n} - \frac{a+b}{2n} = \frac{1}{2n}\left[ab+(1)-a-b\right]$$

- Per il caso in esame:

$$AB = \frac{1}{2(3)}\left[90+80-100-60\right] = 1.67$$

- Effetto AB lievemente maggiore di zero:
  - L'effetto sembra piccolo, almeno in confronto ai due effetti principali

2^2 Factorial design – Introduzione e definizioni

2^k Factorial designs

- Da notare che la stima degli effetti è effettuata usando dei **contrasti**, ovvero delle combinazioni lineari delle osservazioni sperimentali

$$\Gamma = \sum c_i Y_i$$

- Per il 2^k-design i coefficienti c_i assumono valore ±1
- Usando la notazione di Yates i coefficienti contrasti usati per la stima degli effetti sono riportati in tabella:

Effetti	(1)	a	b	ab
A	-1	+1	-1	+1
B	-1	-1	+1	+1
AB	+1	-1	-1	+1

N.B. il coefficiente di contrasto per l'effetto di interazione è il prodotto dei coefficienti relativi agli effetti principali

2^2 Factorial design – Introduzione e definizioni

2^k Factorial designs

- La tabella seguente può essere usata per determinare il segno corretto per ogni combinazione di trattamento
- È la trasposta della tabella definita precedentemente, a cui è stato aggiunta una colonna di + che rappresenta il contributo della media di tutti gli esperimenti.

Effetti	I	A	B	AB
(1)	+	-	-	+
a	+	+	-	-
b	+	-	+	-
ab	+	+	+	+

15

2^2 Factorial design – Introduzione e definizioni

2^k Factorial designs

- Per esempio, per stimare A, è necessario sommare lungo gli elementi della colonna relativa:

Effetti	I	A	B	AB
(1)	+	-	-	+
a	+	+	-	-
b	+	-	+	-
ab	+	+	+	+

Il contrasto è pari a (-1)+*a*-*b*+*ab*

$$A = \frac{1}{2n}\left[-(1) + a - b + ab\right]$$

16

2^2 Factorial design – Introduzione e definizioni

2^k Factorial designs

- **Definizione somme dei quadrati**
- È possibile determinare le somme dei quadrati dei diversi fattori. In particolare, si può dimostrare:

$$SSA = \frac{[ab + a - b - (1)]^2}{4n}$$ 1 gdl

$$SSB = \frac{[ab + b - a - (1)]^2}{4n}$$ 1 gdl

$$SSAB = \frac{[ab + (1) - a - b]^2}{4n}$$ 1 gdl

Metodi statistici per l'analisi dei dati
10 - 14 febbraio 2020
17

17

2^2 Factorial design – Introduzione e definizioni

2^k Factorial designs

- **Definizione somme dei quadrati**
- La somma **totale** dei quadrati può essere determinata nel solito modo:

$$SST = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet})^2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}^2 - \frac{y_{\bullet\bullet\bullet}^2}{2^2 n}$$ $2^2 n-1$ gdl

- Infine, la somma dei quadrati degli errori può essere calcolata per differenza:

$$SSE = SST - SSA - SSB - SSAB$$ $2^2(n-1)$ gdl

Metodi statistici per l'analisi dei dati
10 - 14 febbraio 2020
18

18

2^2 Factorial design – Introduzione e definizioni

2^k Factorial designs

- Tabella ANOVA per l'esempio

Sorgente di variazione	Somma dei quadrati	Gradi di libertà	Varianza	F_0	P-value
Trattamento A	SSA=208.33	1	208.33	53.15	0.0001
Trattamento B	SSB=75.00	1	75.00	19.13	0.0024
Interazione	SSAB=8.33	1	8.33	2.13	0.1826
Errore	SSE=31.34	8	3.92		
Totale	SST=323.00	11			

19

Modello di regressione

2^k Factorial designs

- In un modello a 2k fattori, è possibile esprimere i risultati in termini di un **modello di regressione**:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$$

- In genere, si suggerisce di usare per le x_i delle variabili "codificate" (ovvero assume valori compresi tra -1 e 1).

$$x_1 = \frac{Conc - \left(Conc_{low} - Conc_{high}\right)/2}{\left(Conc_{high} - Conc_{low}\right)/2}$$

$$x_2 = \frac{Cat - \left(Cat_{low} - Cat_{high}\right)/2}{\left(Cat_{high} - Cat_{low}\right)/2}$$

20

Modello di regressione

2^k Factorial designs

- Il modello di regressione può essere ricavato facilmente:

$$\hat{y} = \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet} + \left(\frac{A}{2}\right)x_1 + \left(\frac{B}{2}\right)x_2 = 27.5 + \left(\frac{8.33}{2}\right)x_1 + \left(-\frac{5.00}{2}\right)x_2$$

- Riportato nelle coordinate originali:

$$\hat{y} = \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet} + \left(\frac{A}{2}\right)x_1 + \left(\frac{B}{2}\right)x_2 = 27.5 + \left(\frac{8.33}{2}\right)\frac{Conc - 20}{5} + \left(-\frac{5.00}{2}\right)\left(\frac{Cat. - 1.5}{0.5}\right)$$

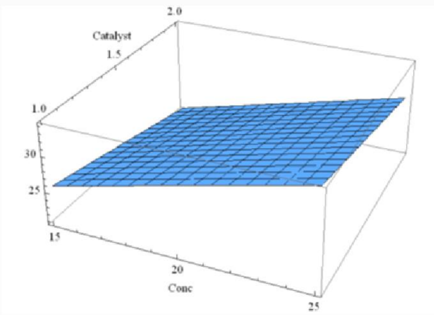
$$= 18.33 + 0.833\,Conc - 5.00\,Cat.$$

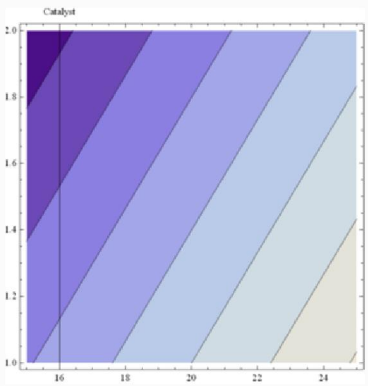
21

Modello di regressione

2^k Factorial designs

- Rappresentazione grafica della **superficie delle risposte**





22

2^3 Design – Definizioni

2^k Factorial designs

- Nel caso in cui si vogliano investigare due diversi livelli di tre diversi fattori.
- Il numero di combinazioni sperimentali da investigare è 2^3=8
- Ci sono diverse notazioni che possono essere usate
  – Si possono usare i simboli "**-**" e "**+**" per rappresentare, rispettivamente, il livello **basso** ed **alto** dei fattori (chiamata *notazione geometrica*)
  – alternativamente si possono usare i numeri 0 e 1
  – si può usare la notazione introdotta nel caso precedente: (1), *a*, *b*, *ab*, *c*, *ac*, *bc* e *abc.*

Metodi statistici per l'analisi dei dati
10 - 14 febbraio 2020
23

23

2^3 Design – Definizioni

2^k Factorial designs

- Tabella riassuntiva delle notazioni

	Prima Notazione			Seconda Notazione			Terza Notazione
Run	A	B	C	A	B	C	Etichette
1	-	-	-	0	0	0	*(1)*
2	+	-	-	1	0	0	*a*
3	-	+	-	0	1	0	*b*
4	+	+	-	1	1	0	*ab*
5	-	-	+	0	0	1	*c*
6	+	-	+	1	0	1	*ac*
7	-	+	+	0	1	1	*bc*
8	+	+	+	1	1	1	*abc*

Metodi statistici per l'analisi dei dati
10 - 14 febbraio 2020
24

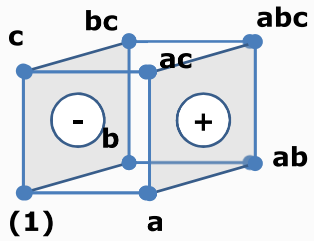
24

2^3 Design – Calcolo degli effetti

2^k Factorial designs

- **Calcolo effetti principali.**
- Possono essere determinati come i contrasti tra i trattamenti su una faccia del cubo e la speculare.
- Esempio per A

$$\bar{y}_{A+} = \frac{a+ab+ac+abc}{4n} \quad \bar{y}_{A-} = \frac{(1)+b+c+bc}{4n}$$



$$A = \bar{y}_{A+} - \bar{y}_{A-}$$

$$= \frac{1}{4n}\left[\underbrace{a+ab+ac+abc}_{\text{Tutti i livelli con la lettera } a \text{ hanno il segno "+"}} \underbrace{-(1)-b-c-bc}_{\text{Tutti i livelli senza la lettera } a \text{ hanno il segno "-"}}\right]$$

25

2^3 Design – Calcolo degli effetti

2^k Factorial designs

- **Calcolo effetti principali**
- In maniera analoga è possibile calcolare gli effetti principali degli altri fattori

$$B = \bar{y}_{B+} - \bar{y}_{B-}$$

$$= \frac{1}{4n}\left[\underbrace{b+ab+bc+abc}_{\textbf{Presenza}\text{ lettera } b\text{: segno "+"}} \underbrace{-(1)-a-c-ac}_{\textbf{Assenza}\text{ lettera } b\text{: segno "-"}}\right]$$

$$C = \bar{y}_{C+} - \bar{y}_{C-}$$

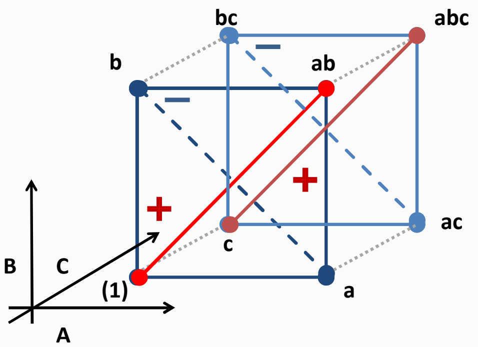
$$= \frac{1}{4n}\left[\underbrace{c+ac+bc+abc}_{\textbf{Presenza}\text{ lettera } c\text{: segno "+"}} \underbrace{-(1)-a-b-ab}_{\textbf{Assenza}\text{ lettera } c\text{: segno "-"}}\right]$$

26

2^3 Design – Calcolo degli effetti

2^k Factorial designs

- **Calcolo interazioni a due effetti.**
- L'interazione AB può essere calcolata come naturale estensione del caso bidimensionale:



- Media delle interazioni sui due distinti livelli di *c*

$$AB_{C-} = \frac{ab + (1) - a - b}{2n}$$

$$AB_{C+} = \frac{abc + c - ac - bc}{2n}$$

$$AB = \frac{AB_{C-} + AB_{C+}}{2}$$

$$= \frac{[abc + ab + c + (1)]}{4n} - \frac{[a + b + bc + ac]}{4n}$$

27

2^3 Design – Calcolo degli effetti

2^k Factorial designs

- **Calcolo interazione a due effetti**
- In maniera analoga è possibile calcolare le altre interazioni

$$AC = \frac{1}{4n}[(1) - a + b - ab - c + ac - bc + abc]$$

$$BC = \frac{1}{4n}[(1) + a - b - ab - c - ac + bc + abc]$$

- L'interazione ABC è definita come la **differenza** media tra le interazioni AB per i due diversi livelli di C

$$ABC = \frac{AB_{C+} - AB_{C-}}{2} = \frac{[abc + c - ac - bc]}{4n} - \frac{[ab + (1) - a - b]}{4n}$$

$$= \frac{1}{4n}[abc - bc - ac + c - ab + b + a - (1)]$$

28

2^3 Design – Calcolo degli effetti

2^k Factorial designs

Combinazione dei trattamenti	Effetto Fattoriale							
	I	A	B	AB	C	AC	BC	ABC
(1)	+	-	-	+	-	+	+	-
a	+	+	-	-	-	-	+	+
b	+	-	+	-	-	+	-	+
ab	+	+	+	+	-	-	-	-
c	+	-	-	+	+	-	-	+
ac	+	+	-	-	+	+	-	-
bc	+	-	+	-	+	-	+	-
abc	+	+	+	+	+	+	+	+

29

2^3 Design – Calcolo degli effetti

2^k Factorial designs

- **Alcune proprietà della tabella**
- Ad esclusione della colonna 1, tutte le colonne hanno un egual numero di segni "+" e "-".
  - La somma di ogni colonna è zero.
- Tale proprietà e vera pure per la somma dei prodotti di due colonne.
- Il prodotto di ogni coppia di colonne restituisce una colonna riportata in tabella, per esempio A×B=AB.

30

2^3 Design – Esercizio

2^k Factorial designs

- Un produttore di bibite è interessato ad ottenere i livelli di riempimento più uniforme possibile nelle bottiglie.
- Le variabili che possono influenzare il processo sono:
  - La percentuale di carbonatazione (gasatura)
    - I livelli sono 10% e 12%
  - La pressione di esercizio del riempitore
    - 20 e 30 psi
  - La velocità di produzione delle bottiglie
    - 200 e 250 bottiglie per minuto
- Per ciascuna combinazione delle condizioni sperimentali, si osserva la deviazione da un livello di riempimento di riferimento
- Si eseguono due repliche per ciascuna osservazione

Metodi statistici per l'analisi dei dati
10 - 14 febbraio 2020 31

31

2^3 Design – Esercizio

2^k Factorial designs

- Misure sperimentali:

Combinazione dei trattamenti	Fattore codificato			Misure sperimentali		
	A	B	C	Replica 1	Replica 2	Totale
(1)	-1	-1	-1	-3.00	-1.00	-4.00
a	1	-1	-1	0.00	1.00	1.00
b	-1	1	-1	-1.00	0.00	-1.00
ab	1	1	-1	2.00	3.00	5.00
c	-1	-1	1	-1.00	0.00	-1.00
ac	1	-1	1	2.00	1.00	3.00
bc	-1	1	1	1.00	1.00	2.00
abc	1	1	1	6.00	5.00	11.00

Metodi statistici per l'analisi dei dati
10 - 14 febbraio 2020 32

32

2^3 Design – Esercizio

2^k Factorial designs

- Usando le formule:

$$A = \frac{1}{4n}[a + ab + ac + abc - (1) - b - c - bc]$$
$$= \frac{1}{8}[1 - (-4) + 5 - (-1) + 3 - (-1) + 11 - 2] = \frac{24}{8} = 3.00$$
$$B = \frac{1}{4n}[b + ab + bc + abc - (1) - a - c - ac] = \frac{18}{8} = 2.25$$
$$C = \frac{1}{4n}[c + ac + bc + abc - (1) - a - b - ab] = \frac{14}{8} = 1.75$$
$$AB = \frac{1}{4n}[abc + ab + c + (1) - a - b - bc - ac] = \frac{6}{8} = 0.75$$

Effetti più importanti

$$AC = \frac{1}{4n}[(1) - a + b - ab - c + ac - bc + abc] = \frac{2}{8} = 0.25$$
$$BC = \frac{1}{4n}[(1) + a - b - ab - c - ac + bc + abc] = \frac{4}{8} = 0.50$$
$$ABC = \frac{1}{4n}[abc - bc - ac + c - ab + b + a - (1)] = \frac{4}{8} = 0.50$$

Effetti meno significativi

Metodi statistici per l'analisi dei dati
10 - 14 febbraio 2020

33

33

2^3 Design – Esercizio

2^k Factorial designs

- Le somme dei quadrati possono essere calcolate in modo immediato:

$$SSA = \frac{1}{n2^3}[a + ab + ac + abc - (1) - b - c - bc]^2 = \frac{(24)^2}{16} = 36.00$$

$$SSB = \frac{(18)^2}{16} = 20.25 \qquad SSC = \frac{(14)^2}{16} = 12.25$$

$$SSAB = \frac{(6)^2}{16} = 2.25 \qquad SSAC = \frac{(2)^2}{16} = 0.25 \qquad SSBC = \frac{(4)^2}{16} = 1.00$$

$$SSABC = \frac{(4)^2}{16} = 1.00$$

$$SSE = SST - (SSA + SSB + SSC + SSAB + SSAC + SSABC + SSBC) = 78 - 73 = 5.0$$

Metodi statistici per l'analisi dei dati
10 - 14 febbraio 2020

34

34

2^3 Design – Esercizio

2^k Factorial designs

- Tabella ANOVA complessiva

Sorgente di variazione	Somma dei quadrati	Gradi di libertà	Varianza	F_0	P-value
Percentuale carb. (A)	36.00	1	36.00	57.60	**<0.0001**
Pressione (B)	20.25	1	20.25	32.40	**0.0005**
Velocità prod. bott. (C)	12.25	1	12.25	19.60	**0.0022**
AB	2.25	1	2.25	3.60	**0.0943**
AC	0.25	1	0.25	0.40	0.5447
BC	1.00	1	1.00	1.60	0.2415
ABC	1.00	1	1.00	1.60	0.2415
Errore	5.00	8	0.625		
Totale	78.00	15			

35

2^3 Design – Esercizio

2^k Factorial designs

- In conclusione,
- Il processo dipende significativamente dai fattori principali
- Si apprezza una blanda dipendenza dall'interazione AB per una significatività pari al 10%

36

Generalizzazione 2^k design

2^k Factorial designs

- La trattazione predente può essere estesa al caso generico di dipendenza da *k* fattori.
- Il modello statistico includerà:
  a) k effetti principali
  b) $\binom{k}{2}$ interazioni a due fattori
  c) $\binom{k}{3}$ interazioni a tre fattori
  d) ...
  e) 1 interazione a k fattori

2^k-1 effetti da determinare

Metodi statistici per l'analisi dei dati
10 - 14 febbraio 2020
37

37

Generalizzazione 2^k design

2^k Factorial designs

- È possibile usare la notazione introdotta precedentemente per descrivere le combinazioni sperimentali.
- Esempio:
  - Campagna sperimentale a 5 fattori (lettere *a*-*e*)
  - Con la scrittura "*abe*" *si* indica la combinazione di trattamenti che prevede i fattori *a*, *b* ed *e* al loro livello "alto" ed i fattori *c* e *d* al livello "basso"

Metodi statistici per l'analisi dei dati
10 - 14 febbraio 2020
38

38

Generalizzazione 2^k design

2^k Factorial designs

- L'approccio generale per l'analisi statistica è il classico ed è richiamato in tabella.

Procedura di analisi per un 2^k design
1. Stimare gli effetti dei fattori
2. Sviluppare il modello iniziale
3. Eseguire i test statistici
4. Raffinare il modello
5. Analizzare i residui
6. Interpretare i risultati

39

Generalizzazione 2^k design

2^k Factorial designs

Source of Variation	Sum of Squares	Degrees of Freedom
k main effects		
A	SS_A	1
B	SS_B	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
K	SS_K	1
$\binom{k}{2}$ two-factor interactions		
AB	SS_{AB}	1
AC	SS_{AC}	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
JK	SS_{JK}	1
$\binom{k}{3}$ three-factor interactions		
ABC	SS_{ABC}	1
ABD	SS_{ABD}	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
IJK	SS_{IJK}	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\binom{k}{k} = 1$ k-factor interaction		
$ABC \cdots K$	$SS_{ABC \cdots K}$	1
Error	SS_E	$2^k(n-1)$
Total	SS_T	$n2^k - 1$

- Analisi della varianza per un 2^k design

40

Generalizzazione 2^k design

2^k Factorial designs

- Per determinare i diversi contrasti associati agli effetti si può ricorrere a software dedicati.
- In maniera alternativa, è possibile determinare i contrasti per gli effetti *AB…K* espandendo il secondo membro dell'equazione:

$$\text{Contrast}_{\text{AB}\cdots\text{K}} = (a \pm 1)(b \pm 1)\ldots(k \pm 1)$$

- Il segno in ogni parentesi è negativo se il fattore è incluso, positivo se il fattore è escluso.
- Il termine unitario nel polinomio è sostituito da (1)

41

Generalizzazione 2^k design

2^k Factorial designs

- **Esempio:** Si consideri un 2^3 design.
- Si intende calcolare il contrasto per AB. L'equazione corrispondente sarà:

$$\begin{aligned}\text{Contrast}_{\text{AB}} &= (a-1)(b-1)(c+1) \\ &= abc + ab + ac + (1) - ac - bc - a - b\end{aligned}$$

- Una volta calcolati i contrasti per gli effetti, è possibile stimare gli effetti e le somme dei quadrati corrispondenti:

$$AB\cdots K = \frac{2}{n2^k}\left(\text{Contrast}_{AB\cdots K}\right)$$

$$SS_{AB\cdots K} = \frac{1}{n2^k}\left(\text{Contrast}_{AB\cdots K}\right)^2$$

42

2^k designs: Fattoriali non replicati

2^k Factorial designs

- Anche nel caso di un numero moderato di fattori, il numero di misure sperimentali è grande.
- Esempio: 5 fattori → 2^5=32 diverse combinazioni di trattamenti da esplorare.
- In tali casi, le risorse limitare possono rendere possibile una **sola replica** per il singolo trattamento.
  - La procedura classica discussa nei lucidi precedenti **non permette una stima dell'errore interno ("errore puro") e quindi della varianza** dell'errore sperimentale.
  - Di conseguenza **non è possibile** lo sviluppo della tabella **ANOVA**

Metodi statistici per l'analisi dei dati
10 - 14 febbraio 2020 43

43

2^k designs: Fattoriali non replicati

2^k Factorial designs

- **Soluzioni 1/2**
- Per avere accesso ad una stima della varianza, si possono **trascurare le interazioni di ordine alto**
  - Intuitivamente la maggior parte della variazione della risposta è dovuta agli effetti principali e alle interazioni di ordine basso,
  - L'eventualità di un'interazione di ordine alto che contribuisca significativamente è poco verosimile.

Metodi statistici per l'analisi dei dati
10 - 14 febbraio 2020 44

44

2^k designs: Fattoriali non replicati

2^k Factorial designs

- **Soluzioni 2/2**
- Rappresentazione su **carta probabilistica** delle **stime degli effetti**
  - Gli effetti **trascurabili** saranno normalmente distribuiti con media zero e varianza σ^2.
    - Tenderanno quindi a disporsi lungo una retta
  - Gli effetti **significativi** avranno medie significativamente diverse da zero
    - Non si disporranno sulla retta

45

2^k designs: Fattoriali non replicati – Esercizio

2^k Factorial designs

- **Esempio: Velocità di filtrazione**
- Si intende investigare la velocità di filtrazione di un prodotto chimico prodotto in un recipiente a pressione
- I fattori interessati sono:
  A. Temperatura
  B. Pressione
  C. Concentrazione
  D. Velocità di agitazione
- Sono quindi necessari 2^4=16 prove sperimentali, condotte in ordine casuale.
- L'ingegnere è interessato a cercare le condizioni sperimentali che massimizzano la velocità di filtrazione

46

2^k designs: Fattoriali non replicati – Esercizio

2^k Factorial designs

- Tabella risultati sperimentali

Numero esperienza	Fattore codificato A	Fattore codificato B	Fattore codificato C	Fattore codificato D	Misure sperimentali (l/h)
(1)	-	-	-	-	45.00
a	+	-	-	-	71.00
b	-	+	-	-	48.00
ab	+	+	-	-	65.00
c	-	-	+	-	68.00
ac	+	-	+	-	60.00
bc	-	+	+	-	80.00
abc	+	+	+	-	65.00
d	-	-	-	+	43.00
ad	+	-	-	+	100.00
bd	-	+	-	+	45.00
abd	+	+	-	+	104.00
cd	-	-	+	+	75.00
acd	+	-	+	+	86.00
bcd	-	+	+	+	70.00
abcd	+	+	+	+	96.00

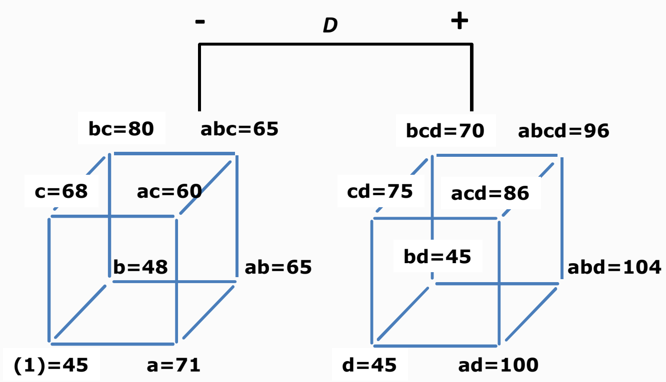
Metodi statistici per l'analisi dei dati
10 - 14 febbraio 2020 47

47

2^k designs: Fattoriali non replicati – Esercizio

2^k Factorial designs

- Altra possibile rappresentazione dei dati sperimentali



Metodi statistici per l'analisi dei dati
10 - 14 febbraio 2020 48

48

2^k designs: Fattoriali non replicati – Esercizio

2^k Factorial designs

- È possibile stimare gli effetti.
- Esempio: effetto principale di A.
- Si può innanzitutto calcolare il contrasto corrispondente

$$
\begin{aligned}
\text{Contrast}_A &= (a-1)(b+1)(c+1)(d+1) \\
&= abcd + abc + abd + acd - bcd + ab + ac + ad - bc - bd - cd + a - b - c - d - (1) \\
&= 96 + 65 + 104 + 86 - 70 + 65 + 60 + 100 - 80 - 45 - 75 + 71 - 48 - 68 - 43 - 45 = 173
\end{aligned}
$$

- Da cui

$$A = \frac{2}{2^4} 173. = 21.625$$

$$SSA = \frac{1}{2^4} (173.)^2 = 1870.56$$

2^k designs: Fattoriali non replicati – Esercizio

2^k Factorial designs

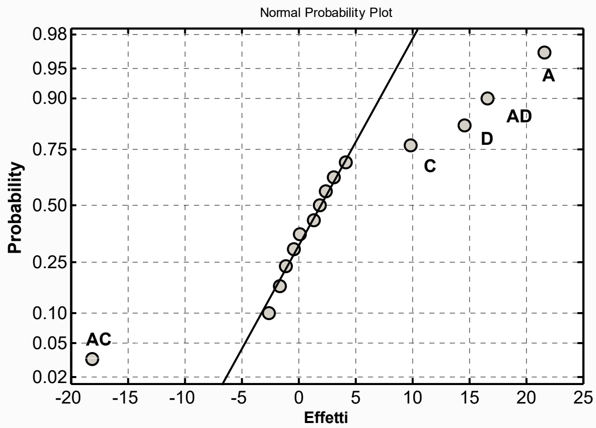
- Stima degli effetti dei fattori e somma dei quadrati

Termine del modello	Stima dell'effetto	Somma dei quadrati
A	**21.625**	1870.56
B	3.125	39.0625
C	**9.875**	390.06
D	**14.625**	855.56
AB	0.125	0.0625
AC	**-18.125**	1314.06
AD	**16.625**	1105.56
BC	2.375	22.56
BD	-0.375	0.562
CD	-1.125	5.0625
ABC	1.875	14.06
ABD	4.125	68.06
ACD	-1.625	10.56
BCD	-2.625	27.56
ABCD	1.375	7.56

2^k designs: Fattoriali non replicati – Esercizio

2^k Factorial designs

- Diagramma su scala probabilistica degli effetti



- Da notare come siano evidenti gli effetti che si discostano dalla distribuzione normale
- Sono gli effetti significativi per il modello

51

2^k designs: Fattoriali non replicati – Esercizio

2^k Factorial designs

- **Considerazioni**
- Risulta evidente che il **fattore B (pressione) non influenza il processo**:
  - Dal punto di vista pratico, le diverse prove eseguite a distinti valori di B possono essere considerate come repliche "genuine" della stessa prova sperimentale.
  - La campagna sperimentale può essere rivista come un 2^3 design nelle sole variabili *temperatura*, *concentrazione* e *velocità di agitazione*, in presenza di due repliche nelle stesse condizioni
  - Esempio di "hidden replication"

52

2^k designs: Fattoriali non replicati – Esercizio

2^k Factorial designs

- Tabella ANOVA per la campagna sperimentale nei soli fattori **A**, **C** e **D** (dipendenza dal fattore B trascurata)

Sorgente di variazione	Somma dei quadrati	Gradi di libertà	Varianza	F_0	P-value
Fattore A	1870.56	1	1870.56	83.36	**<0.0001**
Fattore C	390.06	1	390.06	17.38	**<0.0001**
Fattore D	855.56	1	855.56	38.13	**<0.0001**
AC	1314.06	1	1314.06	58.56	**<0.0001**
AD	1105.56	1	1105.56	49.27	**<0.0001**
CD	5.06	1	5.06	<1	
ACD	10.56	1	10.56	<1	
Errore	179.52	8	22.44		
Totale	5730.94	15			

53

Addizione di punti centrali nel 2^k factorial design

2^k Factorial designs

- Un potenziale limite della procedura è legata all'assunzione di **linearità**.
- In realtà, la possibilità di avere termini di interazione $x_i x_j$ permette delle curvature nella superficie di risposta.

$$y = \beta_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j x_j + \sum_{i<j} \beta_{ij} x_j x_j + \varepsilon$$

- In alcuni casi però, tale blanda non linearità può rivelarsi insufficiente ed è necessario introdurre dei termini **quadratici** nel modello per una descrizione adeguata.

$$y = \beta_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j x_j + \sum_{i<j} \beta_{ij} x_j x_j + \sum_{j=1}^{k} \beta_{jj} x_j^2 + \varepsilon$$

54

Addizione di punti centrali nel 2^k factorial design

2^k Factorial designs

- Per testare la necessità dei termini quadratici nel modello, si possono aggiungere **punti centrali** al factorial design.
- Tali **nuove** misure sperimentali consistono in repliche in corrispondenza del punto di **coordinata x_i=0** (i=1, …,k).
- Tali "nuove" osservazioni y^C sperimentali **non influenzano** la stima pregressa degli effetti dei fattori.
- **Procedura:**
- Calcolare

$$\bar{y}_F = \frac{\sum y_{ij}}{n_F}$$

Media delle misure effettuate prima dell'addizione dei punti centrali. **Previsione** del modello in corrispondenza del punto centrale.

- e

$$\bar{y}_C = \frac{\sum y_i^C}{n_C}$$

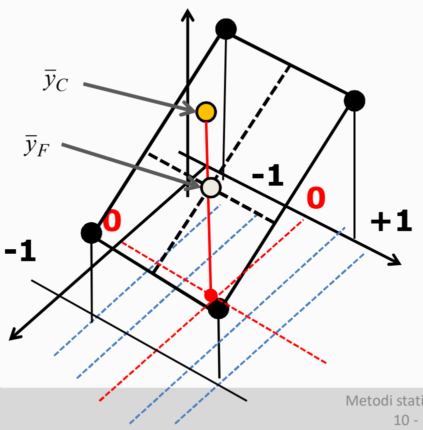
Media delle **osservazioni** effettuate in corrispondenza del punto centrale.

55

Addizione di punti centrali nel 2^k factorial design

2^k Factorial designs

- Per illustrare la procedura si consideri un 2^2 design con una osservazione in corrispondenza di (-,-), (+,-), (-,+), (+,+) e n_c osservazioni in corrispondenza del centro.



- È possibile introdurre la statistica ad 1 gdl:

$$SS_{PureQ} = \frac{n_F n_C (\bar{y}_F - \bar{y}_C)^2}{n_F + n_C}$$

- dove:
  - n_F è il numero di punti del Factorial design
  - n_c numero di punti del centro
  - $\bar{y}_F$ e $\bar{y}_C$ sono le due medie per i punti del centro

56

2^k Factorial design frazionali – Introduzione

2^k Factorial designs

- All'aumentare del numero di fattori, l'esecuzione di un Factorial design completo diventa ingestibile.
- Esempio: 6 fattori
  - Sono richieste **2^6=64** combinazioni di prove sperimentali
  - solo **6** gdl (su 63) corrispondono alle stime degli effetti principali
  - e solo **15** corrispondono alle interazioni a due fattori
  - i restanti 42 gdl sono associati ad interazioni a tre fattori o di ordine superiore
- Una ragionevole descrizione può quindi essere ottenuta ricorrendo ad una **frazione** dell'esperimento fattoriale completo

Metodi statistici per l'analisi dei dati
10 - 14 febbraio 2020 57

57

2^k Factorial design frazionali – Introduzione

2^k Factorial designs

- I factorial designs sono spesso usati **nella fase iniziale** della sperimentazione: si considerano più fattori con lo scopo di identificare quali di essi hanno realmente effetto sul processo.
- **Esperimenti di screening**
- Una volta identificati i fattori più importanti, si calibra la sperimentazione successiva solo su di essi.

Metodi statistici per l'analisi dei dati
10 - 14 febbraio 2020 58

58

2^k Factorial design frazionali – 2^{k-1} designs

2^k Factorial designs

- Esempio: Caso con tre fattori
- Si intende eseguire solo la **metà** delle combinazioni sperimentali richieste dalla campagna completa ($2^3=8$).
- Il numero di prove sperimentali è pari $\mathbf{2^{3-1}=4}$

→ **2^{k-1} design**

Metodi statistici per l'analisi dei dati
10 - 14 febbraio 2020
59

59

2^k Factorial design frazionali – 2^{k-1} designs

2^k Factorial designs

- Tabella completa delle combinazioni per un 2^3 design

Combinazione dei trattamenti	Effetto Fattoriale							
	I	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
a	+	+	-	-	-	-	+	+
b	+	-	+	-	-	+	-	+
c	+	-	-	+	+	-	-	+
abc	+	+	+	+	+	+	+	+
ab	+	+	+	-	+	-	-	-
ac	+	+	-	+	-	+	-	-
bc	+	-	+	+	-	-	+	-
(1)	+	-	-	-	+	+	+	-

- Si intende selezionare solo i primi quattro trattamenti per il nostro 2^2 design frazionale

Metodi statistici per l'analisi dei dati
10 - 14 febbraio 2020
60

60

2^k Factorial design frazionali – 2^{k-1} designs

2^k Factorial designs

- Da notare che il sottoinsieme di esperimenti è formato dalla selezione delle combinazioni di trattamenti che contemplano la selezione della colonna ABC.
  - Definizione: ABC è chiamato **generatore** di questa particolare frazione
  - Inoltre, anche la colonna identità I ha sempre valori positivi, per cui si può introdurre la **relazione di definizione**:

$$I = ABC$$

61

2^k Factorial design frazionali – 2^{k-1} designs

2^k Factorial designs

- Le combinazioni dei trattamenti presi in considerazione possono essere usate per stimare gli effetti principali.

$$[A] = \tfrac{1}{2}(a - b - c + abc)$$
$$[B] = \tfrac{1}{2}(-a + b - c + abc)$$
$$[C] = \tfrac{1}{2}(-a - b + c + abc)$$

- Si può anche verificare facilmente che sussiste la stessa espressione anche

$$[BC] = \tfrac{1}{2}(a - b - c + abc)$$
$$[AC] = \tfrac{1}{2}(-a + b - c + abc)$$
$$[AB] = \tfrac{1}{2}(-a - b + c + abc)$$

62

2^k Factorial design frazionali – 2^{k-1} designs

2^k Factorial designs

- Quindi, si osserva che

$$[A]=[BC]$$
$$[B]=[AC]$$
$$[C]=[AB]$$

→ **Non è possibile differenziare** tra A e BC, B e AC, C e AB

- La stima reale è sulle combinazioni:
  - [A]→A+BC
  - [B]→ B+AC
  - [C]→ C+AB
- Le stime dei fattori principali sono *combinate* con le interazioni di primo ordine
- Tali coppie prendono il nome di **pseudonimi** o **alias**

Metodi statistici per l'analisi dei dati
10 - 14 febbraio 2020 63

63

2^k Factorial design frazionali – 2^{k-1} designs

2^k Factorial designs

- In maniera analoga, se si fossero scelte le ultime 4 righe (ovvero l'altra *metà* della campagna completa originale):
  - *ab*
  - *bc*
  - *cd*
  - (1)
- si giunge ad una stima accoppiata tra fattori principali e interazioni del primo ordine che si basa stavolta sulle combinazioni (*complementari*):
  - [A]'→A-BC
  - [B]'→ B-AC
  - [C]'→ C-AB

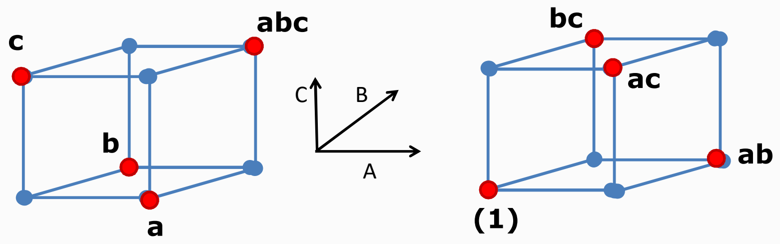
Metodi statistici per l'analisi dei dati
10 - 14 febbraio 2020 64

64

2^k Factorial design frazionali – 2^{k-1} designs

2^k Factorial designs

- Rappresentazione dei due potenziali 2^2 design



2^k Factorial design frazionali – 2^{k-1} designs

2^k Factorial designs

- Da notare che, una volta eseguite entrambi le metà della campagna sperimentale, è possibile risalire alla stime indipendenti sia dei fattori principali che delle interazioni.
- Ad esempio:

$$\frac{1}{2}\left([A]+[A]'\right)=\frac{1}{2}\left(A+BC+A-BC\right)=A$$

- e, analogamente:

$$\frac{1}{2}\left([A]-[A]'\right)=\frac{1}{2}\left(A+BC-A+BC\right)=BC$$

2^k Factorial design frazionali – Livelli di risoluzione dei design frazionali 2^k-1

2^k Factorial designs

- **Designs di risoluzione III**
- Gli effetti principali non sono *combinati* con gli altri effetti principali, ma con le interazioni a due fattori.
  - Definito con il simbolo: 2_{III}^{k-1}
- **Designs di risoluzione IV**
- Gli effetti principali non sono *combinati* con altri effetti principali o con le interazioni a due fattori, ma le interazioni a due fattori sono combinate tra loro.
  - Definito con il simbolo: 2_{IV}^{k-1}
- **Designs di risoluzione V**
- Gli effetti principali e le interazioni a due fattori non sono combinate tra loro. Al più sono presenti combinazioni di interazioni a due fattori con combinazioni a tre fattori.
  - Definito con il simbolo: 2_{V}^{k-1}

Metodi statistici per l'analisi dei dati
10 - 14 febbraio 2020 67

67

2^k Factorial design frazionali – 2^{k-1} designs – Esercizio

2^k Factorial designs

- Riprendiamo l'esempi della velocità di filtrazione.
- Si ricorda che era stata effettuata una campagna sperimentale completa della velocità di filtrazione al variare congiunto delle variabili
  - Temperatura (A)
  - Pressione (B)
  - Concentrazione (C)
  - Velocità di mescolamento (D)
- Al posto di eseguire la campagna completa si esegue una campagna sperimentale con 8 prove sperimentali di risoluzione 2_{IV}^{4-1} .
- Si sfrutta la relazione di definizione:

I=ABCD

Metodi statistici per l'analisi dei dati
10 - 14 febbraio 2020 68

68

2^k Factorial design frazionali – 2^{k-1} designs – Esercizio

2^k Factorial designs

- Tabella con le misure sperimentali "selezionate"

Prova sperimentale	Progettazione di base A	B	C	D=ABC	Combinazione trattamenti	Misure sperimentali (l/h)
1	-	-	-	-	(1)	45.00
2	+	-	-	+	ad	100.00
3	-	+	-	+	bd	45.00
4	+	+	-	-	ab	65.00
5	-	-	+	+	cd	75.00
6	+	-	+	-	ac	60.00
7	-	+	+	-	bc	80.00
8	+	+	+	+	abcd	96.00

69

2^k Factorial design frazionali – 2^{k-1} designs – Esercizio

2^k Factorial designs

- Si possono calcolare le stime degli effetti principali. Per esempio, per [A]:

$$[A]=\frac{1}{4}(-45+100-45+65-75+60-80+96)$$
$$=19.00 \rightarrow A+BCD$$

- Analogamente per le interazioni del primo ordine. Per esempio, per [AB]:

$$[AB]=\frac{1}{4}(45-100-45+65+75-60-80+96)$$
$$=-1.00 \rightarrow AB+CD$$

Stima	Struttura pseudonimi
[A]=19.00	[A]→A+BCD
[B]=1.50	[B]→B+ACD
[C]=14.00	[C]→C+ABD
[D]=16.50	[D]→D+ABC
[AB]=-1.00	[AB]→AB+CD
[AC]=-18.50	[AC]→AC+BD
[AD]=19.00	[AD]→AD+BC

70

2^k Factorial design frazionali – 2^{k-1} designs – Esercizio

2^k Factorial designs

- Dalla consultazione della tabella si può concludere che i fattori principali A, C e D sono dominanti, mentre B è trascurabile.
- Nei termini di interazione è ragionevole assumere che le interazioni dominanti siano quelle che non contemplano B:
  - [AC]~ AC (contributo di BD assunto trascurabile)
  - [AD]~ AD (contributo di BC assunto trascurabile)
- Il modello può quindi essere definito nelle sole variabili temperatura (A), concentrazione (C) e velocità di agitazione (D).
- È possibile quindi **proiettare** la campagna sperimentale in un opportuno sottospazio rappresentato solo da queste variabili.

Metodi statistici per l'analisi dei dati
10 - 14 febbraio 2020 71

71

2^k Factorial design frazionali – 2^{k-1} designs – Esercizio

2^k Factorial designs

- Riscrittura tabella condizioni sperimentali con la rimozione della variabile B (si ricade in un 2^3 design completo)

Prova sperimentale	A	C	D	Combinazione trattamenti	Misure sperimentali (l/h)
1	-	-	-	(1)	45.00
2	+	-	+	ad	100.00
3	-	-	+	d	45.00
4	+	-	-	a	65.00
5	-	+	+	cd	75.00
6	+	+	-	ac	60.00
7	-	+	-	c	80.00
8	+	+	+	acd	96.00

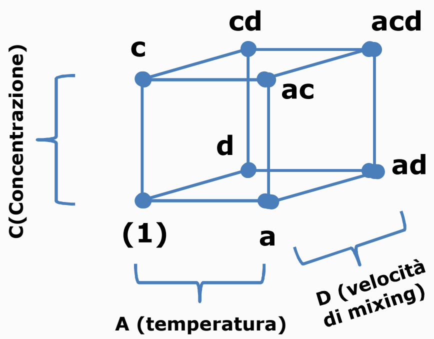
Metodi statistici per l'analisi dei dati
10 - 14 febbraio 2020 72

72

2^k Factorial design frazionali – 2^{k-1} designs – Esercizio

2^k Factorial designs

- Proiezione del 2_{IV}^{4-1} design nello spazio ACD



Metodi statistici per l'analisi dei dati
10 - 14 febbraio 2020

73

73

2^k Factorial design frazionali – 2^{k-1} designs – Esercizio 2

2^k Factorial designs

- Si intende investigare le variazioni di produzione di un circuito integrato al variare di 5 fattori:
  – A=Impostazione di apertura (piccolo, grande)
  – B=tempo di esposizione (+20%, -20% rispetto al valore di riferimento)
  – C=tempo di sviluppo (30, 45 s)
  – D=Dimensione della maschera
  – E=tempo di incisione
- A tal riguardo si intende progettare un **2^{5-1} design**.
  – Si definisce il fattoriale completo per i fattori A,B,C e D
  – Si seleziona ABCDE come **generatore**
  – i valori E si ottengono assegnando la regola E=ABCD

Metodi statistici per l'analisi dei dati
10 - 14 febbraio 2020

74

74

2^k Factorial design frazionali – 2^{k-1} designs – Esercizio 2

2^k Factorial designs

- Tabella del 2^{5-1} design

Prova sperimentale	Progettazione di base					Combinazione trattamenti	Resa
	A	B	C	D	E=ABCD		
1	-	-	-	-	+	e	8,00
2	+	-	-	-	-	a	9,00
3	-	+	-	-	+	b	34,00
4	+	+	-	-	+	abe	52,00
5	-	-	+	-	-	c	16,00
6	+	-	+	-	+	ace	22,00
7	-	+	+	-	+	bce	45,00
8	+	+	+	-	-	abc	60,00
9	-	-	-	+	-	d	6,00
10	+	-	-	+	+	ade	10,00
11	-	+	-	+	+	bde	30,00
12	+	+	-	+	-	abd	50,00
13	-	-	+	+	+	cde	15,00
14	+	-	+	+	-	acd	21,00
15	-	+	+	+	-	bcd	44,00
16	+	+	+	+	+	abcde	63,00

Metodi statistici per l'analisi dei dati
10 - 14 febbraio 2020

75

75

2^k Factorial design frazionali – 2^{k-1} designs – Esercizio 2

2^k Factorial designs

- Disegno di risoluzione V (al più combinazioni interazioni secondo-terzo ordine)

Termine del modello	Stima dell'effetto	Somma dei quadrati
A	**11,125**	495,062
B	**33,875**	4590,062
C	**10,875**	473,06
D	-0,875	3,063
E	0,625	1,563
AB	**6,875**	189,06
AC	0,375	0,563
AD	1,125	5,063
AE	1,125	5,063
BC	0,625	1,563
BD	-0,125	0,063
BE	-0,125	0,063
CD	0,875	3,063
CE	0,375	0,563
DE	-1,375	7,563

Metodi statistici per l'analisi dei dati
10 - 14 febbraio 2020

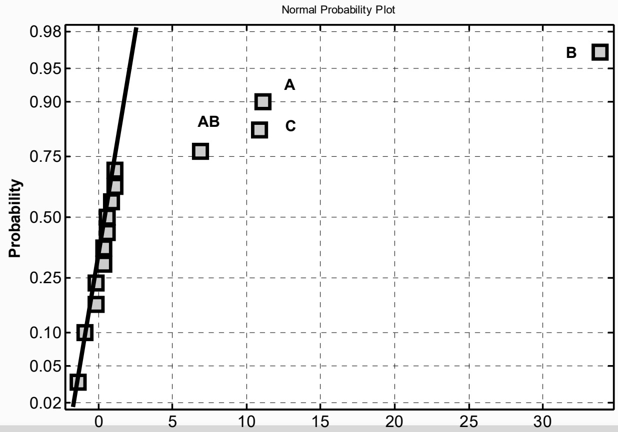
76

76

2^k Factorial design frazionali – 2^{k-1} designs – Esercizio 2

2^k Factorial designs

- Dalla carta probabilistica si evince che gli effetti significativi sono associati a A,B,C e AB



77

2^k Factorial design frazionali – 2^{k-1} designs – Esercizio 2

2^k Factorial designs

- In realtà, gli effetti sono
  - A+BCDE
  - B+ACDE
  - C+ABDE
  - AB+CDE
- Ma risulta plausibile che gli effetti di terzo e quarto ordine possono essere **trascurati**.
- Rimuovendo la dipendenza dalle variabili D e E, la campagna sperimentale **degenera in un modello full factorial design 2^3 con due repliche per punto sperimentale**.

78

2^k Factorial design frazionali – 2^{k-1} designs – Esercizio 2

2^k Factorial designs

- Analisi della Varianza per il 2^3 design finale
- Da notare come il modello a 4 variabili raccolga il 99% della variabilità totale

Sorgente di variazione	Somma dei quadrati	Gradi di libertà	Varianza	F_0	P-value
(A) Apertura	495.0625	1	495.0625	193.20	**<0.0001**
(B) Tempo di esposizione	4950.625	1	4950.625	1791.24	**<0.0001**
(C) Tempo di sviluppo	473.06	1	473.06	184.61	**<0.0001**
AB	189.06	1	189.06	73.78	**<0.0001**
Errore	28.19	11	2.5625		
Totale	5775.44	15			

Metodi statistici per l'analisi dei dati
10 - 14 febbraio 2020

79

79

Bibliografia

2^k Factorial designs

- Un testo introduttivo e completo sulla statistica (intuitivo):
  - Wonnacott TH and RJ Wonnacott. *Introductory statistics for business and economics*. New York: Wiley, 1990.
- Riferimenti utili :
  - Montgomery DC *Progettazione e analisi degli esperimenti*. Milano etc: McGraw-Hill, 2005.
  - Box GE, WG Hunter and JS Hunter. *Statistics for experimenters: an introduction to design, data analysis, and model building*. New York: Wiley, 1978.
- Testo dedicato soprattutto alla regressione lineare
  - Montgomery DC, EA Peck, and GG Vining. *Introduction to linear regression analysis*. Hoboken, NJ: Wiley, 2012

Metodi statistici per l'analisi dei dati
10 - 14 febbraio 2020

80

80

Software commerciali 1/2

2^k Factorial designs

- Software della **Umetrics**:
  - **Simca** (dedicato alla statistica multivariata, es: PCA, PLS)
    - http://www.umetrics.com/products/simca
  - **Modde** (dedicato principalmente al Design Of Experiments)
    - http://www.umetrics.com/products/modde
- **Minitab** (programma completo per l'analisi statistica e la modellazione)
  - http://www.minitab.com/
- **JMP** (come Minitab, è un programma semplice da usare e completo, utile sia per l'analisi statistica che per il DOE)
  - http://www.jmp.com/

81

Software commerciali 2/2

2^k Factorial designs

- **Matlab**
- Strumento molto versatile, risulta estremamente utile con i toolbox aggiuntivi:
  - ***Statistics***
  - www.mathworks.it

82

Software freeware/open source

2^k Factorial designs

- **R**
- Software freeware, molto potente (anche se un po' ostico da utilizzare)
  - http://www.r-project.org/
- La versione GUI **Rstudio** del software risulta di più facile consultazione (attenzione: non è gratuita per il privato)
  - https://www.rstudio.com/
- **SciPy**
- Libreria di Python che include anche sotto-pacchetti di statistica
  - https://www.scipy.org/

Metodi statistici per l'analisi dei dati
10 - 14 febbraio 2020

83

83

Software freeware/open source

2^k Factorial designs

- **Scilab**
  - http://www.scilab.org/
- **GNU Octave**
  - https://gnu.org/software/octave/
  - Software open-source ispirati a Matlab.

Metodi statistici per l'analisi dei dati
10 - 14 febbraio 2020

84

84