Università degli Studi di Cagliari
Corso di Laurea in Matematica

Esame di Geometria 1

22 Febbraio 2016

1. Si considerino gli spazi vettoriali $\mathbb{R}_2[x]$ e $\mathbb{R}_3[x]$ dei polinomi nella variabile x di grado minore o uguale a 2 e 3, rispettivamente. Sia

$$f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_3[x]$$

l'applicazione definita da

$$f(\, p(x)\,) := (x - 1)\, p(x),$$

a) Dimostra che f è lineare.

b) Considerate le basi canoniche B e B' di $\mathbb{R}_2[x]$ e $\mathbb{R}_3[x]$, rispettivamente, scrivi la matrice associata ad f rispetto alle basi B e B'.

c) Trova il nucleo di f ed una sua base

d) Trova l'immagine di f ed una sua base

e) Il polinomio $p(x) = x^3 + 1$ appartiene all'immagine di f?

f) Dopo aver verificato che $C = (2, 2x, 1 + x^2)$ è una base di $\mathbb{R}_2[x]$, trova la matrice di passaggio da C a B e la matrice associata ad f rispetto alle basi C e B'.

2. Utilizzando il Teorema di Rouché-Capelli, discutere e risolvere, al variare del parametri reale h, il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x + y - z = 1 + k \\ x + y + kz = 0 \\ kx - 2y + z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

Inoltre, posto $k = -1$, si trovi una base dello spazio vettoriale delle soluzioni.

3. Determinare se le seguenti matrici sono simili

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ed in caso affermativo trovare una matrice invertibile P tale che $A = P\, B\, P^{-1}$.