Università di Cagliari

Corso di Laurea in Matematica

Prova scritta di Geometria 1

22 Febbraio 2017

Esercizio 1

Sia $\mathbb{R}_k[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali nell'indeterminata x di grado minore o uguale a k, e sia $f\colon \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ l'applicazione così definita

$$f(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 3ax^2 + 2bx + c.$$

a) Prova che f è un'applicazione lineare.
b) Dopo aver mostrato che $\mathcal{B} = (-x^2 + 1,\ x^2 + 1, 2x,\ x^3 + 1)$ e che $\mathcal{B}' = (2x^2 - x,\ x^2 + x,\ x^2 - 1)$ sono basi di $\mathbb{R}_3[x]$ e $\mathbb{R}_2[x]$, rispettivamente, trova la matrice associata ad f rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$.
c) Trova il nucleo di f e una sua base.
d) Data l'applicazione lineare $g\colon \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ la cui matrice associata rispetto alla base $\mathcal{B}'$ è
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
trova $(g \circ f)(2x^3 - x + 1)$.

Esercizio 2

Utilizzando il teorema di Rouché-Capelli discuti e trova le soluzioni, al variare del parametro reale h, del seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x + y - z = 1 + h \\ x + y + hz = 0 \\ hx - 2y + z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

Inoltre, nel caso in cui h = -1 si trovi un sistema di generatori dello spazio vettoriale delle soluzioni del sistema.

Esercizio 3

Sia $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2 ad entrate reali, e

$$f\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

l'applicazione tale che $f(A) = A + A^t$, per ogni $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Verifica che f è un'applicazione lineare.
b) Trova gli autovalori e gli autospazi di f.
c) Stabilisci se f è diagonalizzabile ed, in caso affermativo, trova una base di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formata da autovettori di f.
d) Trova il valore del parametro reale k affinché la matrice $\begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & k \end{pmatrix}$ sia un autovettore di f.