



FACOLTÀ DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA



Laurea in Architettura

DICAAR

## LABORATORIO INTEGRATO DI PROGETTAZIONE TECNOLOGICA A.A. 2019-2020

modulo: Termofisica dell'edificio

La trasmittanza termica periodica parte 2

Slide 1-69

ripasso 1-16

*Docente: ROBERTO RICCIU*



# Argomenti della lezione

- **Riferimenti normativi: UNI 13786 / Anna Magrini: soluzioni per l'isolamento termico degli edifici esistenti. EPC ed. 2013**

## Argomenti trattati:

- **Grandezze termofisiche  $C_p$  e capacità termica**
- **Equazione generale della conduzione**
- **Parametri dinamici di una parete**

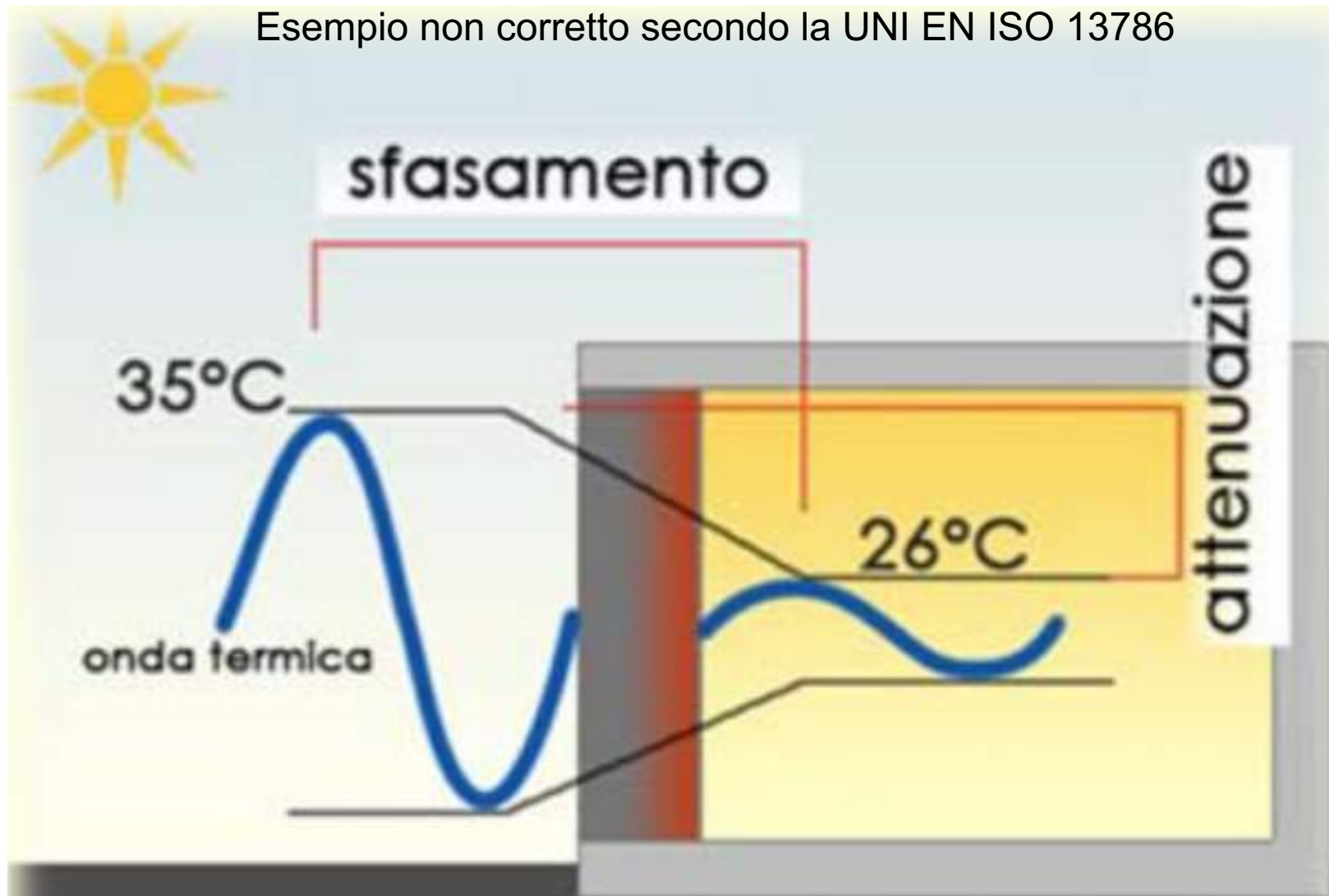
**UNI 13786**



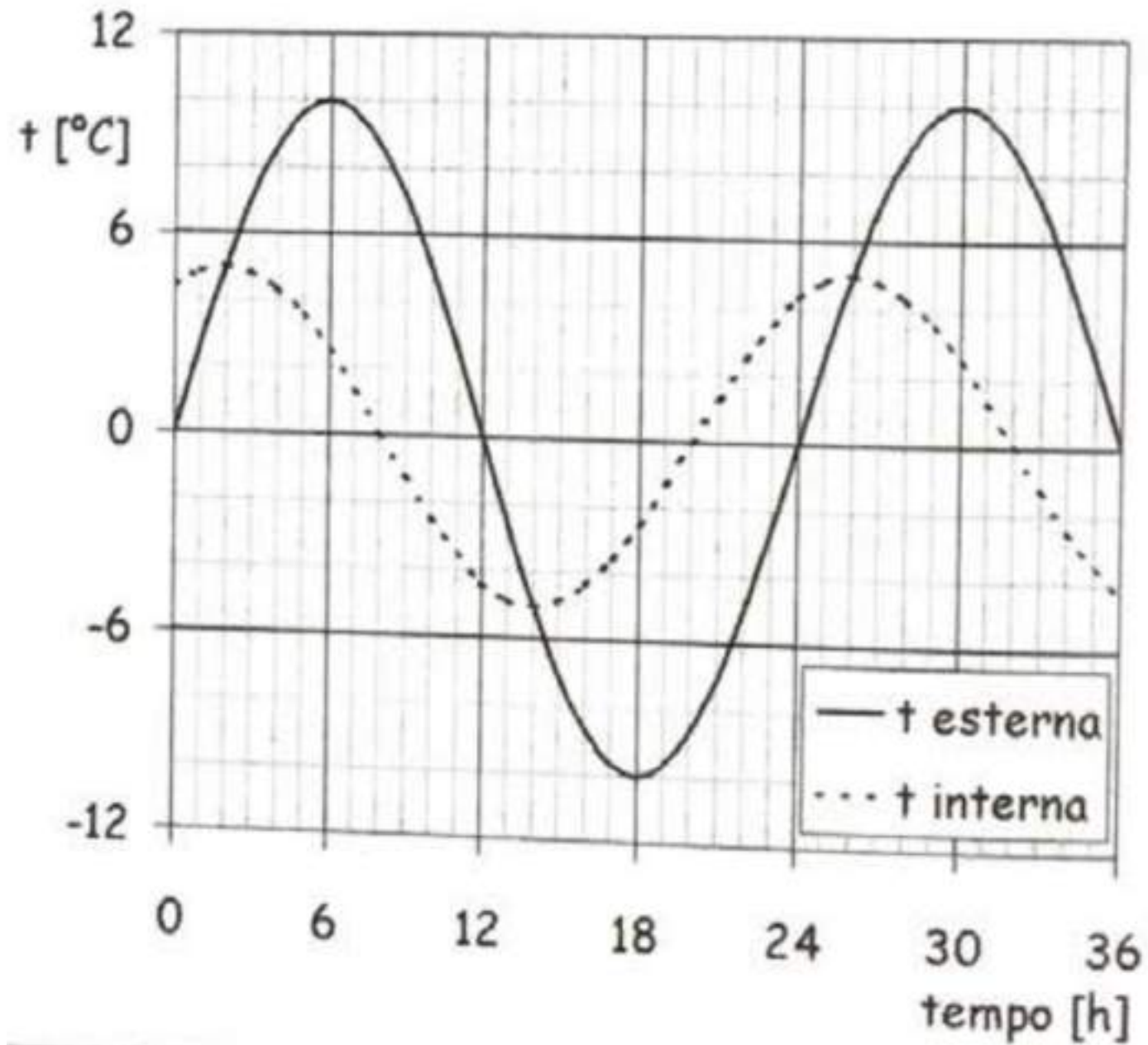
# La trasmittanza termica periodica

# La trasmittanza termica periodica

Esempio non corretto secondo la UNI EN ISO 13786



# La trasmittanza termica periodica



## 1) Trasmittanza termica periodica $Y_{ie} \left[ \frac{W}{m^2 K} \right]$

# La trasmittanza termica periodica

1) Trasmittanza termica periodica  $Y_{ie} \left[ \frac{W}{m^2 K} \right]$

2) Fattore di attenuazione  $\frac{|Y_{ie}|}{U}$

# La trasmittanza termica periodica

1) Trasmittanza termica periodica  $Y_{ie} \left[ \frac{W}{m^2 K} \right]$

2) Fattore di attenuazione  $\frac{|Y_{ie}|}{U}$

3) Ammettenze termiche  $Y_{ii}$  e  $Y_{ee}$



# La trasmittanza termica periodica

1) Trasmittanza termica periodica  $Y_{ie} \left[ \frac{W}{m^2 K} \right]$

2) Fattore di attenuazione  $\frac{|Y_{ie}|}{U}$

3) Ammettenze termiche  $Y_{ii}$  e  $Y_{ee}$

4) Capacità termiche areiche  $k_i$  e  $k_e$

5) Profondità di penetrazione  $d = \sqrt{\frac{\lambda t_p}{\pi \rho c}}$

6)  $\xi = \frac{L}{d}$

## Il modello di calcolo

## Equazione del calore

(conduzione e monodimensionale)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$T$  = temperatura [ $^{\circ}$  C]

$x$  = coordinata spaziale [m]

$t$  = coordinata temporale [s]

$a$  = diffusività termica [ $m^2/s$ ]

$\lambda$  = conduttività termica [W/(m K)]

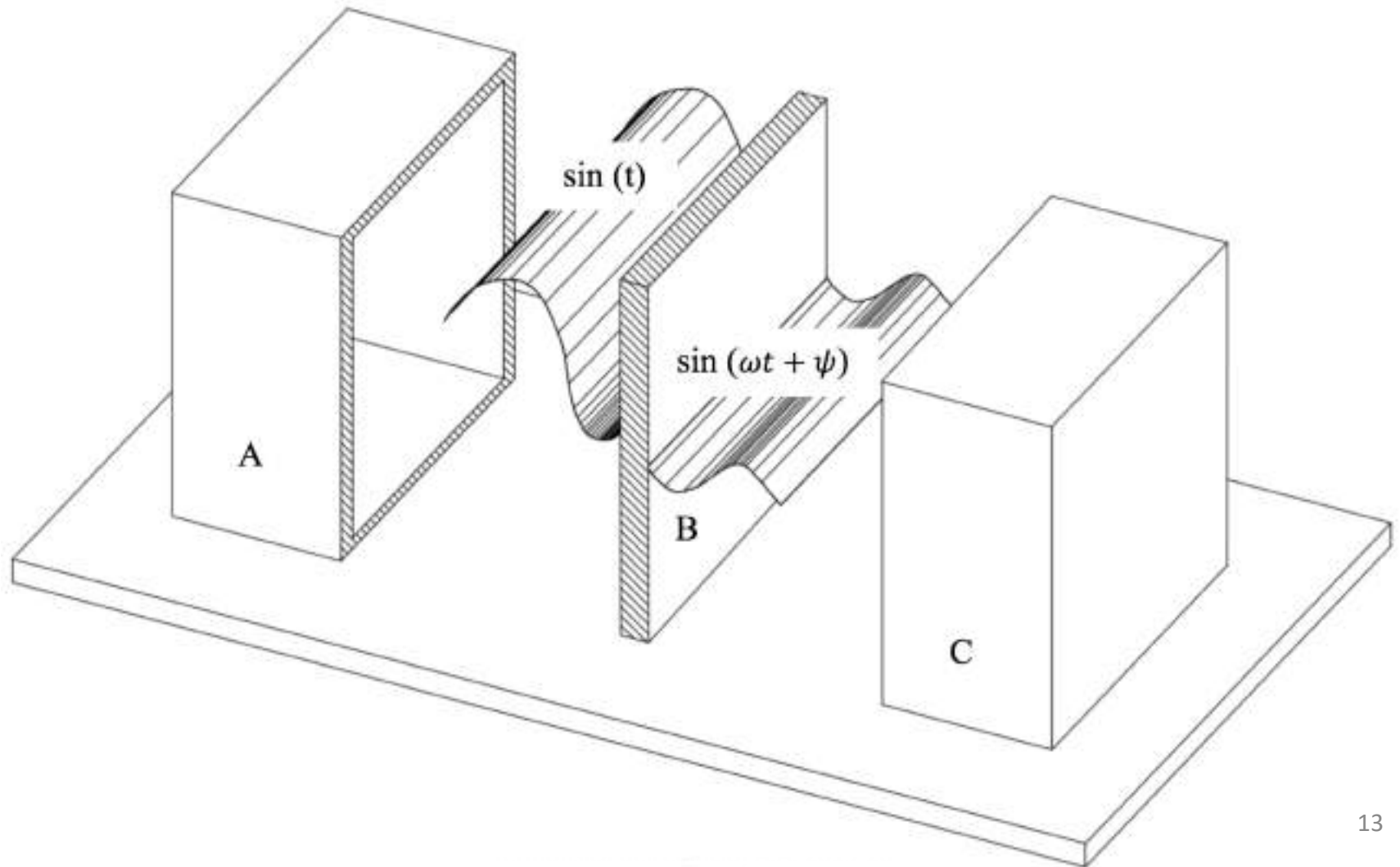
$\rho$  = densità volumica [ $kg / m^3$ ]

$c_p$  = calore specifico [kJ / (kg K)]

$$a = \frac{\lambda}{\rho c_p}$$

# La trasmittanza termica periodica

Onda sinusoidale = solo in camera climatica



$$T(t, x = 0) = T_m + |\hat{T}| \cos(\omega t + \psi)$$

$T_m$  = temperatura media [ $^{\circ}$  C]

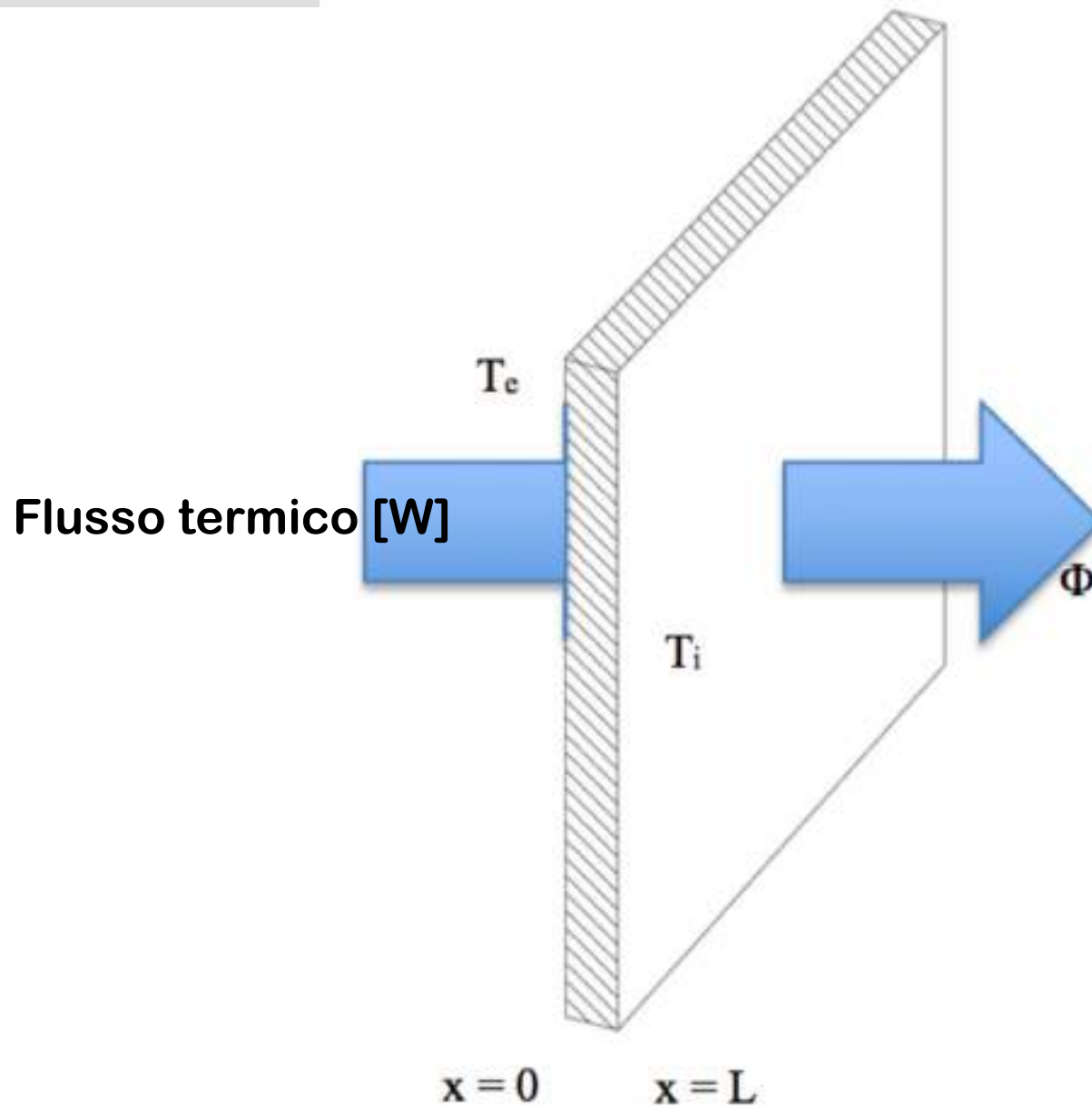
$|\hat{T}|$  = semi-ampiezza della variazione della temperatura [ $^{\circ}$  C]

$\omega = 2\pi/t_p$  pulsazione del fenomeno oscillatorio di periodo  $t_p$  [m]

$t_p$  = periodo considerato [s]

$\psi$  = differenza angolare di fase [rad]

# Il modello di calcolo



# Il modello di calcolo

$$\phi(t, x = 0) = \phi_m + |\hat{\phi}| \cos(\omega t + \varphi)$$

$\phi_m$  = temperatura media [ $^{\circ}$  C]

$|\hat{\phi}|$  = semi-ampiezza della variazione della temperatura [ $^{\circ}$  C]

$\omega = 2\pi/t_p$  pulsazione del fenomeno oscillatorio di periodo  $t_p$  [m]

$t_p$  = periodo considerato [s]

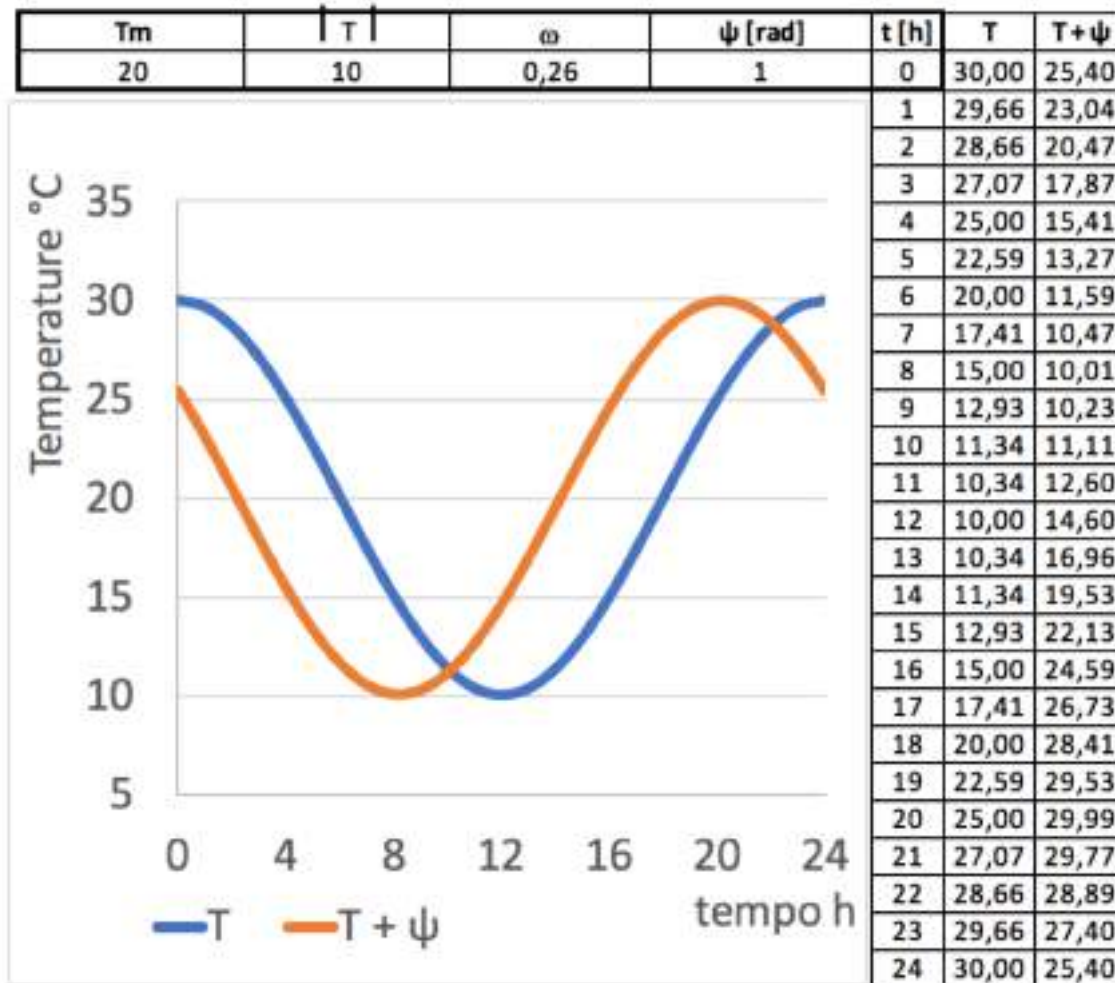
$\varphi$  = differenza angolare di fase [rad]



## Esempio col foglio di calcolo

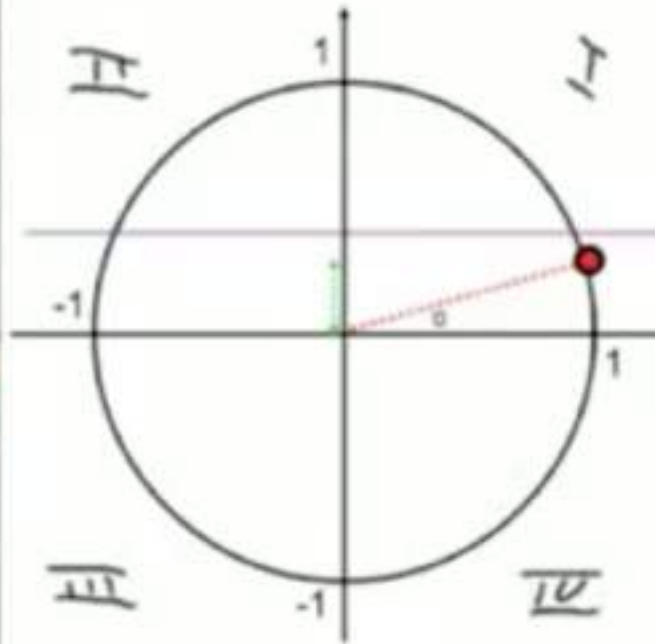
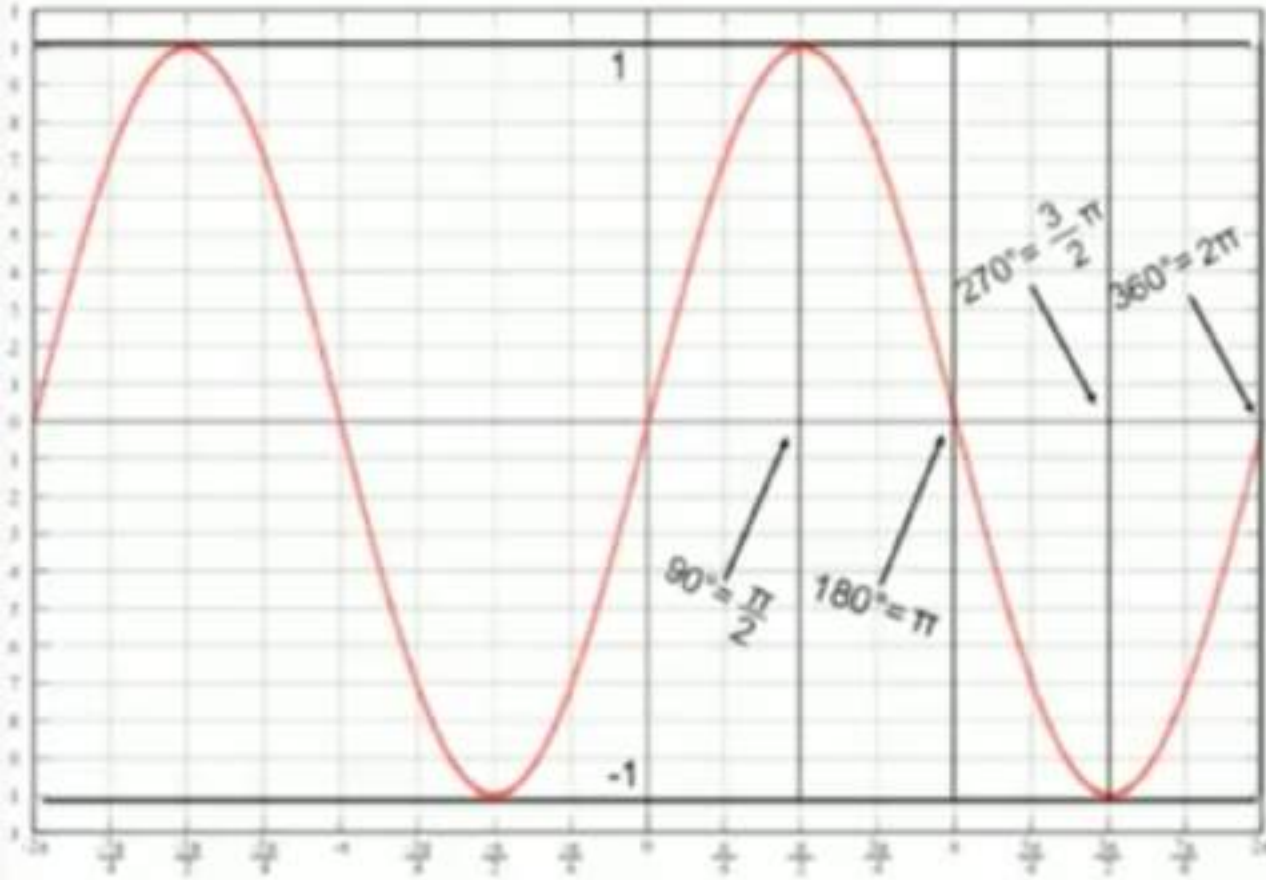
# Il modello di calcolo

$$T(t, x = 0) = T_m + |T| \cos(\omega t + \psi)$$

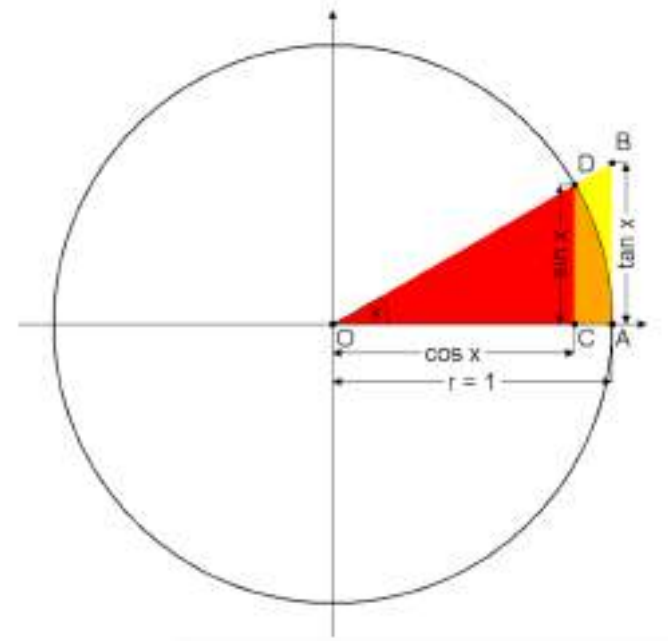
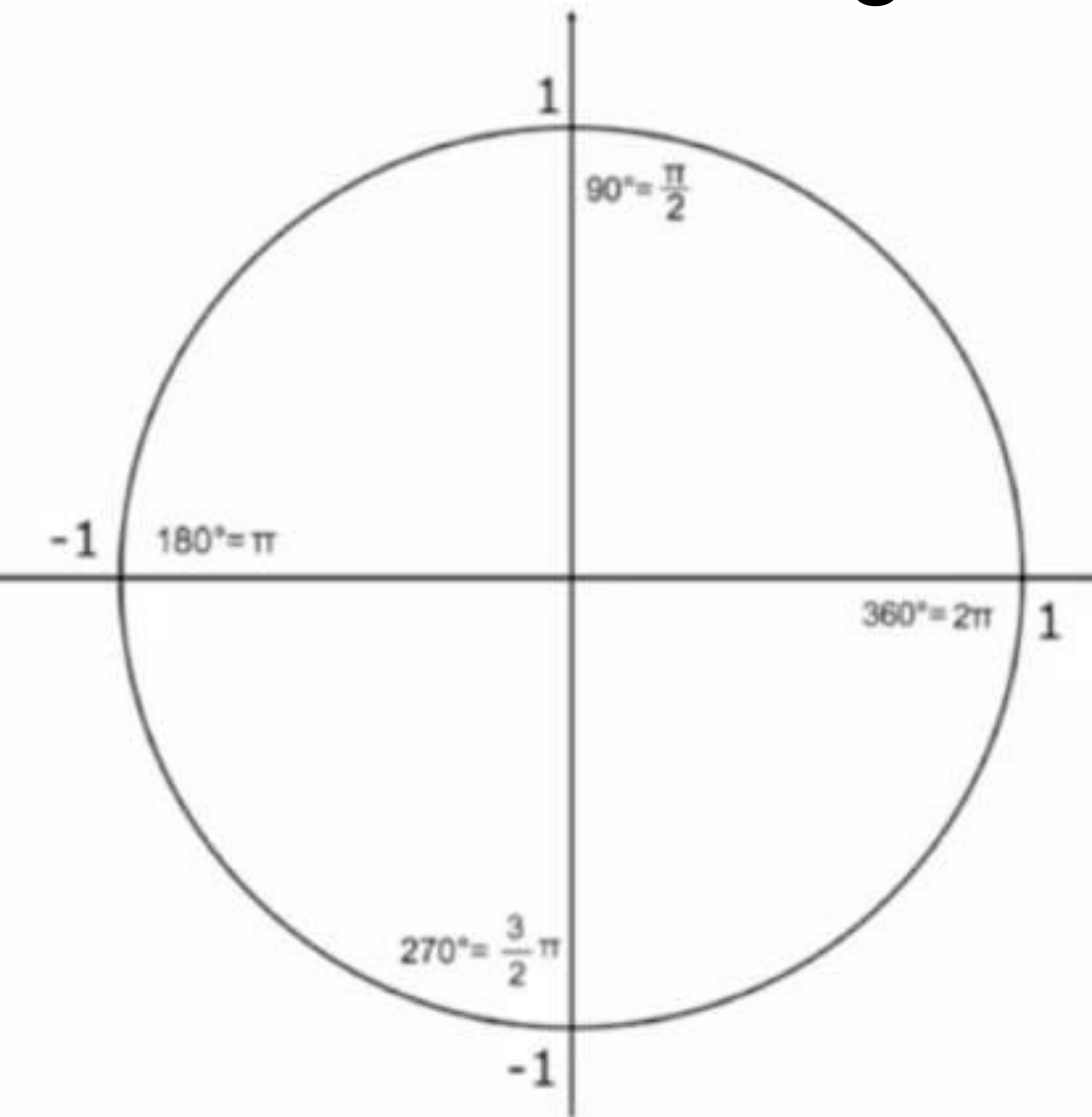


## Funzioni trigonometriche

## Le funzioni trigonometriche

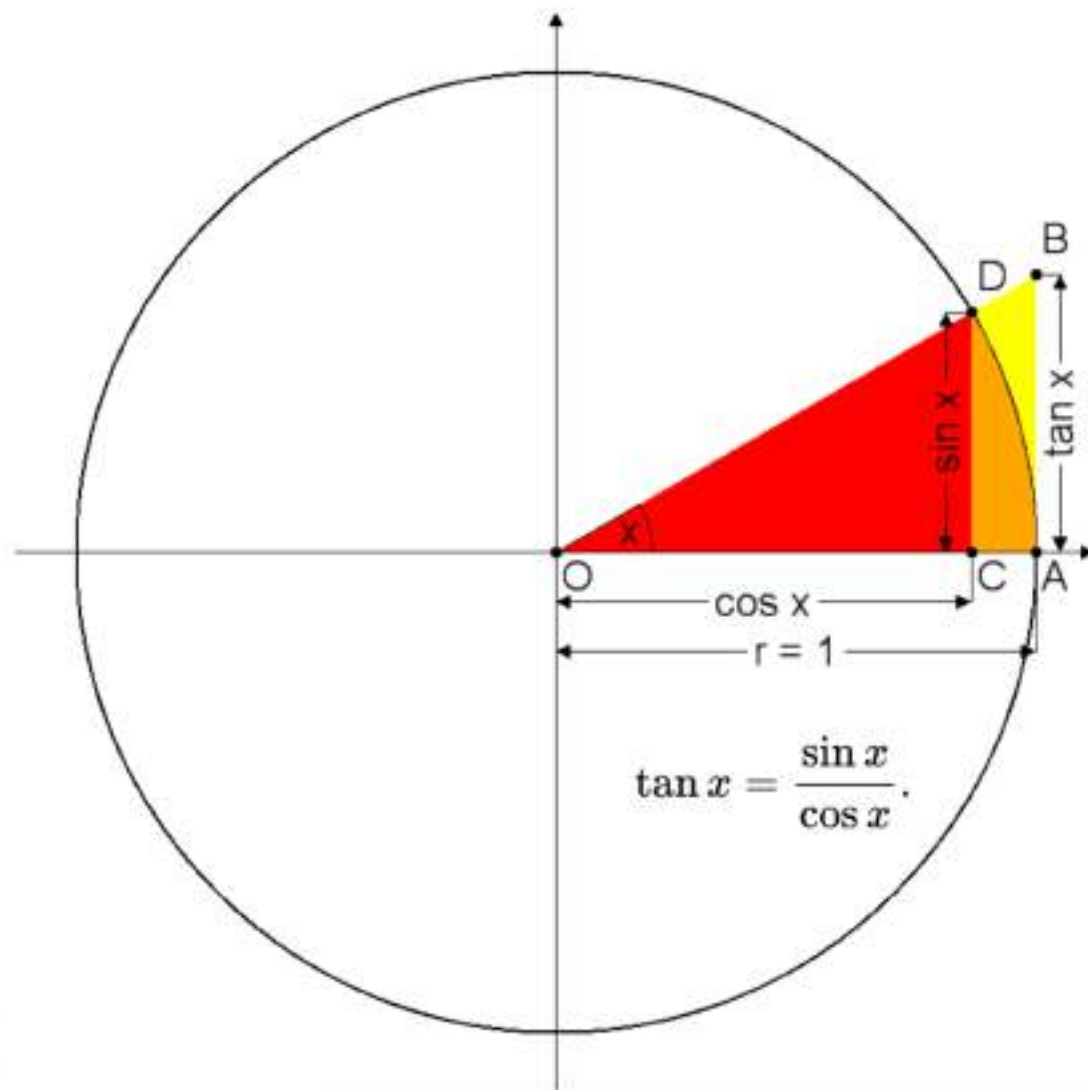
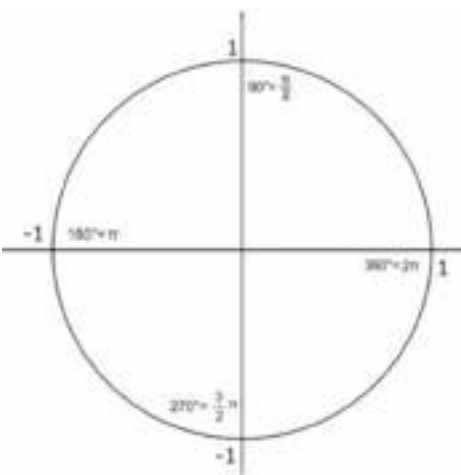


## Le funzioni trigonometriche

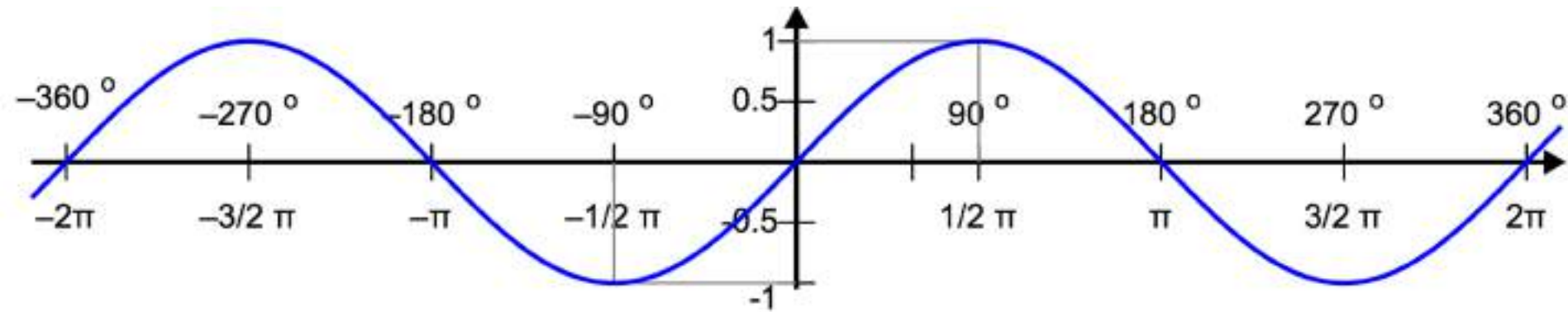


# Il modello di calcolo

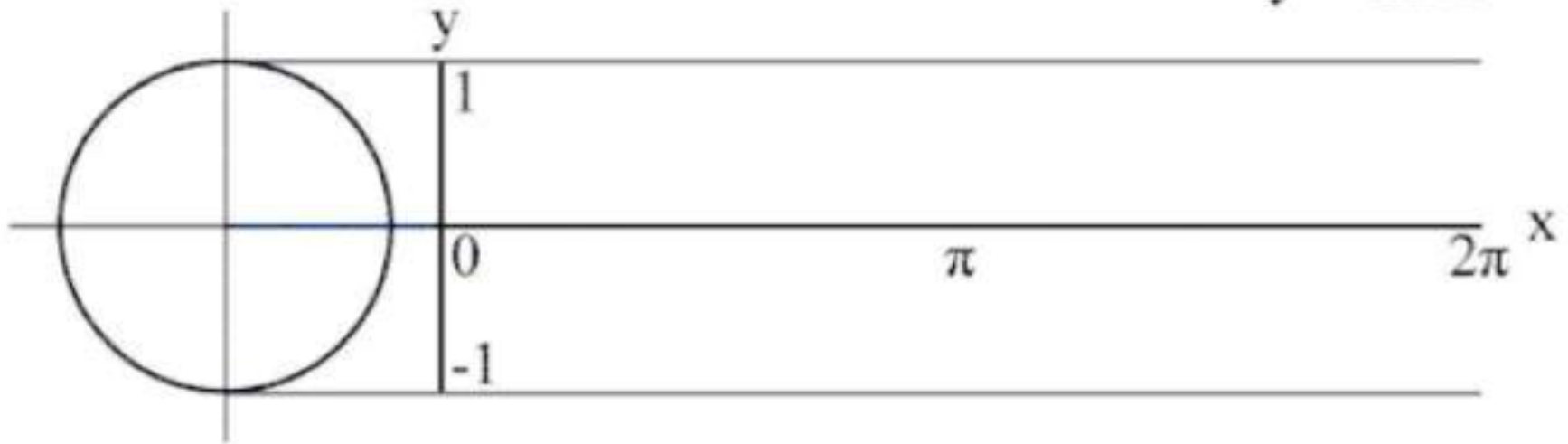
## Le funzioni trigonometriche



## Le funzioni trigonometriche



$$y = \sin x$$



## **Numeri complessi**



# Il modello di calcolo | numeri complessi

$$z = (a, b) = a + i b = x + iy$$

$$\operatorname{Re} z = a \quad \operatorname{Im} z = b$$

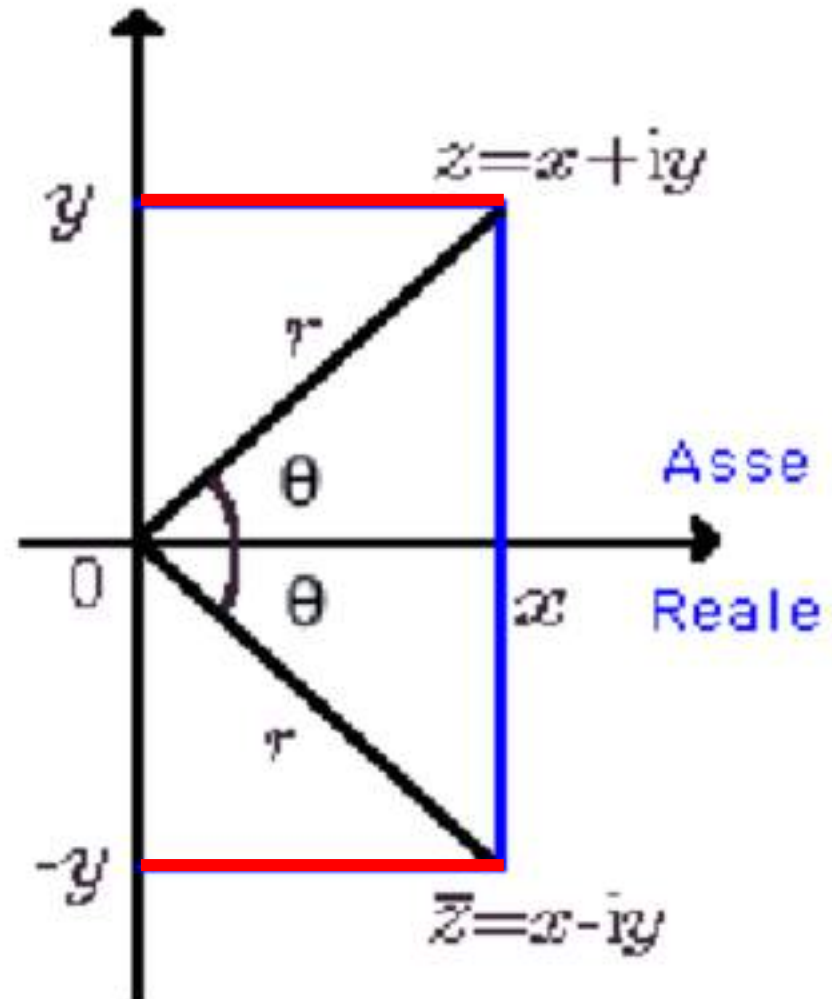
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$$

$$\bar{z} = a - ib = \operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z$$

$$z * \bar{z} = |z|^2$$

$$z = a + ib = \rho (\underbrace{\cos\theta}_{\text{red}} + i \underbrace{\sin\theta}_{\text{blue}}) = \rho e^{i\theta}$$

Asse Immaginario



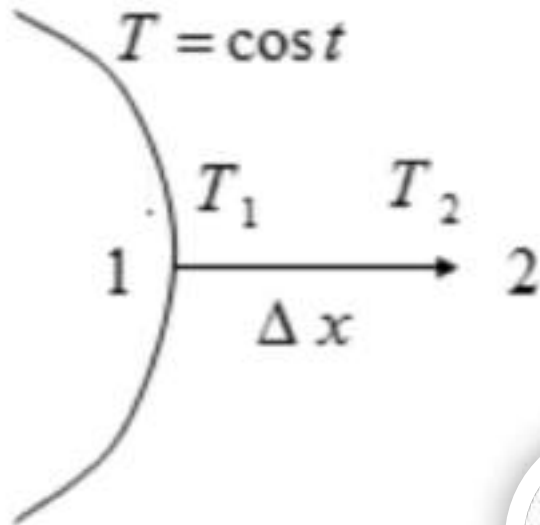
## Il modello fisico

Forma di un'equazione con variabili indipendenti

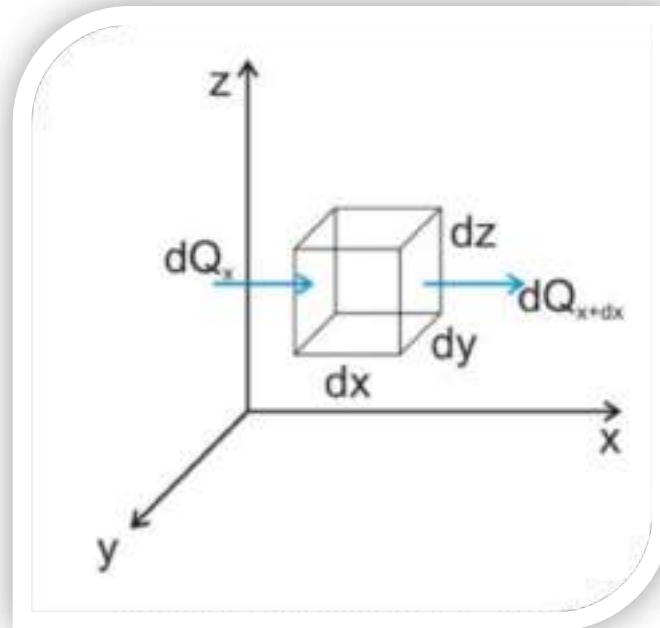
$$mx + ny = 0$$

# Il modello di calcolo

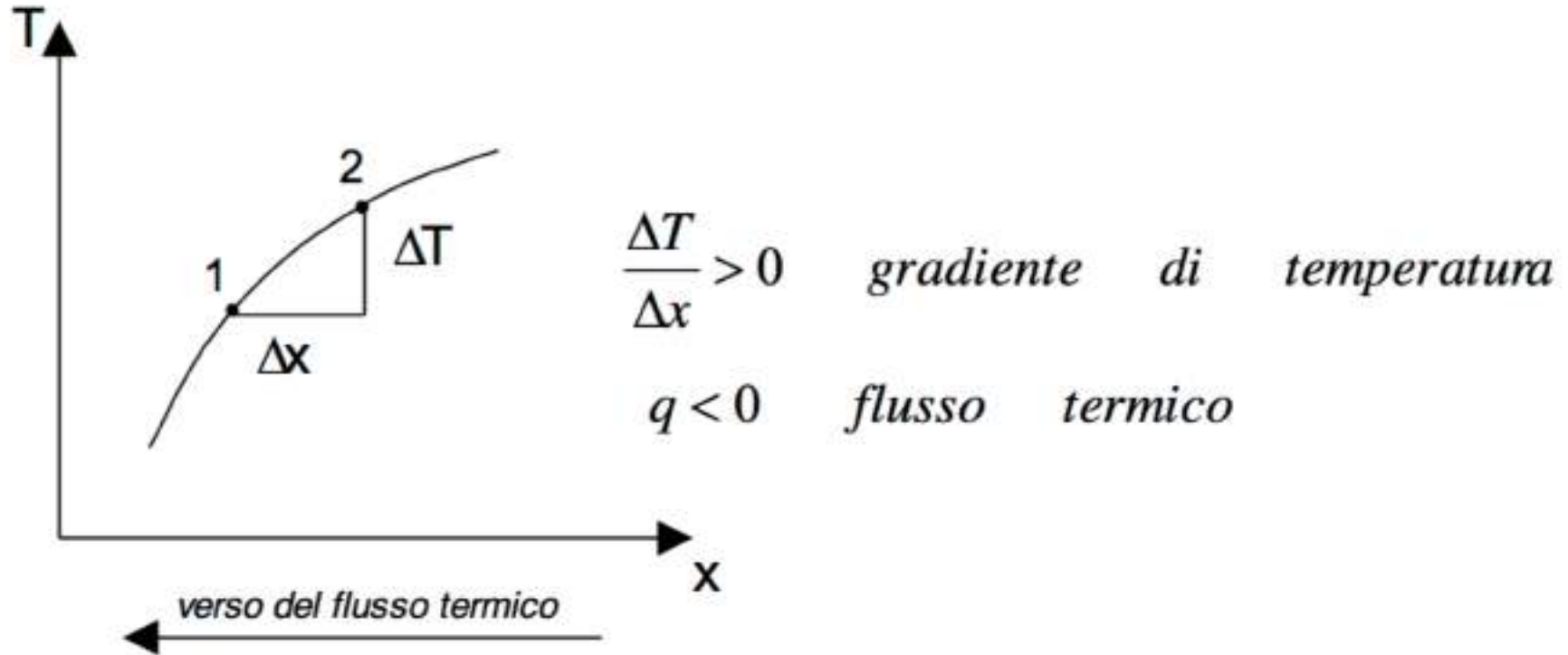
## Il gradiente della temperatura



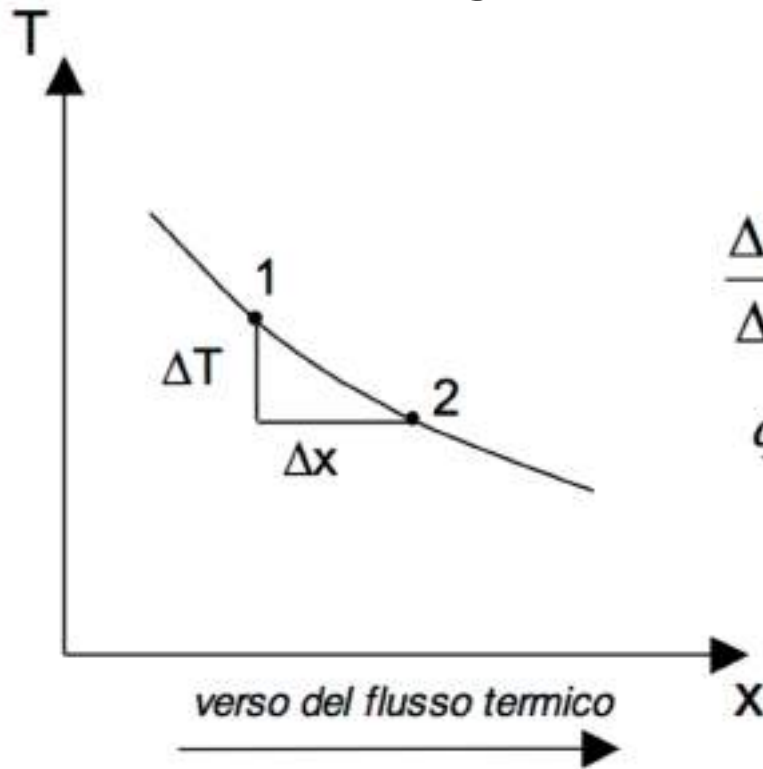
$$\text{grad}T = \frac{T_2 - T_1}{\Delta x}$$



## Il gradiente della temperatura



## Il gradiente della temperatura



$$\frac{\Delta T}{\Delta x} < 0 \quad \text{gradiente di temperatura}$$

$$q > 0 \quad \text{flusso termico}$$

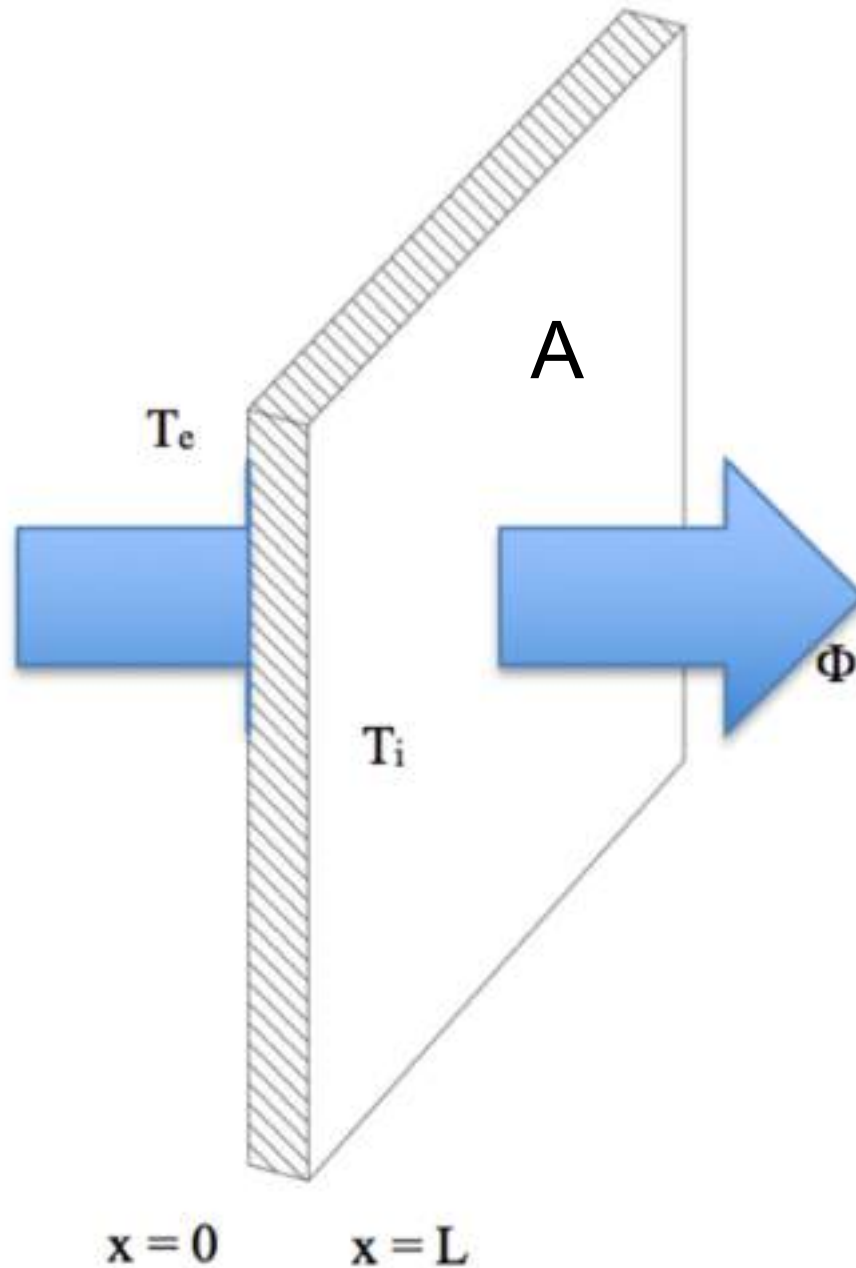
# Il modello di calcolo

## Legge del calore di Fourier

relazione tra **flusso termico** e la **temperatura**

$$q = -\lambda \cdot A \frac{\Delta T}{\Delta x} \text{ [W]}$$

# Il modello di calcolo



$$q = -\lambda \cdot A \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

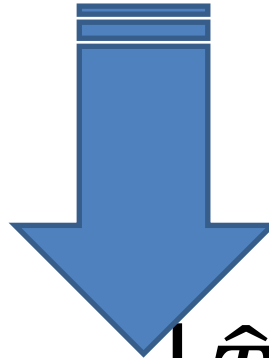


# Il modello di calcolo

Dal sistema di equazioni alla matrice

$$\mathbf{A}\hat{T}_e + \mathbf{B}\hat{T}_i = 0$$

$$\mathbf{C}\hat{\Phi}_e + \mathbf{D}\hat{\Phi}_i = 0$$



$$\begin{vmatrix} \hat{T}_e \\ \hat{\Phi}_e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \hat{T}_i \\ \hat{\Phi}_i \end{vmatrix} = |\mathbf{Z}_{mn}| \cdot \begin{vmatrix} \hat{T}_i \\ \hat{\Phi}_i \end{vmatrix}$$

La matrice delle grandezze e degli elementi

$$\begin{vmatrix} \hat{T}_e \\ \hat{\Phi}_e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \hat{T}_i \\ \hat{\Phi}_i \end{vmatrix}$$

# Il modello di calcolo

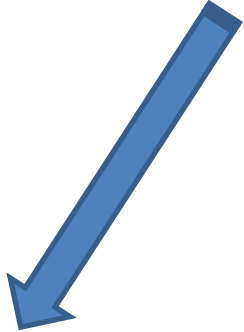
$$\begin{vmatrix} \hat{T}_i \\ \hat{\Phi}_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{D} & -\mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{A} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \hat{T}_e \\ \hat{\Phi}_e \end{vmatrix} = |\mathbf{Z}_{mn}| \cdot \begin{vmatrix} \hat{T}_e \\ \hat{\Phi}_e \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{T}_i \\ \hat{\Phi}_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Z_{22} & -Z_{12} \\ -Z_{21} & Z_{11} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \hat{T}_e \\ \hat{\Phi}_e \end{vmatrix}$$

# Il modello di calcolo

La matrice a componenti complesse

$$\begin{vmatrix} \hat{T}_e \\ \hat{\Phi}_e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \hat{T}_i \\ \hat{\Phi}_i \end{vmatrix}$$


$$Z_{mn} = (a+ib)$$

## Forma matriciale

$$\begin{vmatrix} \hat{T}_e \\ \hat{\Phi}_e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \hat{T}_i \\ \hat{\Phi}_i \end{vmatrix}$$

## Sistema di Equazioni

$$\hat{T}_e = Z_{11}\hat{T}_i + Z_{12}\hat{\Phi}_i = 0$$

$$\hat{\Phi}_e + Z_{21}\hat{T}_i + Z_{22}\hat{\Phi}_i = 0$$

# Il modello di calcolo: Temperature e flussi termici

$|Z_{11}|$  è un fattore di ampiezza di temperatura, ovvero l'ampiezza delle variazioni di temperatura sul lato 2 come effetto di una variazione di temperatura di ampiezza 1 K sul lato 1.

$|Z_{21}|$  fornisce l'ampiezza della densità del flusso termico attraverso il lato 2 come effetto di una variazione periodica della temperatura sul lato 1 con un'ampiezza di 1 K.

$|Z_{12}|$  indica l'ampiezza della temperatura sul lato 2 quando il lato 1 è soggetto a una variazione periodica di densità di flusso termico con un'ampiezza di 1  $W/m^2$ .

$|Z_{22}|$  è il fattore di ampiezza di flusso termico, ovvero l'ampiezza delle variazioni della densità di flusso termico attraverso il lato 2 come effetto di una variazione di densità di flusso termico con ampiezza di 1  $W/m^2$  attraverso il lato 1.

# Il modello di calcolo

**Modulo e Fase o Argomento** della matrice  $Z_{mn}$

$$|Z_{mn}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$Z_{mn} = (a + ib)$$

$$\varphi \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \varphi = \arg(Z_{mn}) \Rightarrow$$

$$\varphi = \arctg\left(\frac{b}{a}\right) \forall \varphi \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

# Il modello di calcolo: lo sfasamento

$\varphi_{11}$  è lo sfasamento tra le temperature su ciascun lato del componente.

$\varphi_{21}$  è lo sfasamento tra la densità di flusso termico attraverso il lato 2 e la temperatura sul lato 1.

$\varphi_{12}$  è lo sfasamento tra la temperatura sul lato 2 e la densità di flusso attraverso il lato 1.

$\varphi_{22}$  è lo sfasamento tra le densità di flusso termico attraverso ciascun lato del componente.



## Gli elementi della matrice

La trasmittanza termica periodica.

$$Z_{12} \quad \rightarrow \quad Y_{ie} = \frac{1}{Z_{12}} = \left( \frac{\hat{\Phi}_i}{\hat{T}_e} \right)_{\vartheta_i=0}$$

sfasamento

$$\Delta t_{ie} = \frac{t_p}{2\pi} \arg(Y_{ie})$$

Gli elementi della matrice

$$Z_{11}, Z_{12}, Z_{22}$$

**Le ammettenze termiche**

$$Y_{ii} = -\frac{Z_{11}}{Z_{12}} = \left( \frac{\hat{\Phi}_e}{\hat{T}_e} \right)_{\hat{T}_e=0}$$

$$Y_{ee} = -\frac{Z_{22}}{Z_{12}} = -\left( \frac{\hat{\Phi}_e}{\hat{T}_e} \right)_{\hat{T}_i=0}$$

Gli elementi della matrice

$$Z_{11}; Z_{12}; Z_{22}$$

**Le capacità termiche areiche**

$$K_i = \frac{t_p}{2\pi} \left| \frac{Z_{11}-1}{Z_{12}} \right|$$

$$K_e = \frac{t_p}{2\pi} \left| \frac{Z_{22}-1}{Z_{12}} \right|$$

## La profondità di penetrazione

$$d = \sqrt{\frac{\lambda t_p}{\pi \rho c}}$$

**dove:**

$\lambda$  = **conduttività termica** [W / (m K)];

$t_p$  = **periodo considerato** [s];

$\rho$  = **densità volumica** [kg / m<sup>3</sup>];

$c$  = **calore specifico (capacità termica specifica)** [kJ / (kg K)].

**rapporto tra lo spessore dello strato  $L$  e la profondità di penetrazione  $d$ :**

$$\xi = \frac{L}{d}$$

# Il modello di calcolo

La matrice dei componenti a partire dalle proprietà termo-fisiche

$$Z_{11} ; Z_{12} ; Z_{21}; Z_{22}$$

$$Z_{11} = Z_{22} = \cosh(\xi) \cos(\xi) + i \sinh(\xi) \sin(\xi)$$

$$Z_{12} = - \left( \frac{d}{2\lambda} \right) \left\{ \begin{array}{l} \sinh(\xi) \cos(\xi) + \cosh(\xi) \sin(\xi) + \\ i [\cosh(\xi) \sin(\xi) - \sinh(\xi) \cos(\xi)] \end{array} \right\}$$

# Il modello di calcolo

$$Z_{21} = - \left( \frac{\lambda}{d} \right) \left\{ \begin{array}{l} \sinh(\xi) \cos(\xi) - \cosh(\xi) \sin(\xi) + \\ i [\sinh(\xi) \cos(\xi) + \cosh(\xi) \sin(\xi)] \end{array} \right\}$$

$$d = \sqrt{\frac{\lambda t_p}{\pi \rho c}}$$

$$\xi = \frac{L}{d}$$

## **Numeri complessi**

## Proprietà dei numeri complessi

$$(a+ib)(c+id) = ac + iad + ibc + i^2bd =$$

$$ac + i(ad + bc) - bd = (ac - bd) + i(ad + bc)$$



## Inverso e rapporto di NC

$$\frac{1}{(a+ib)} = \frac{(a-ib)}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i \frac{b}{a^2+b^2}$$

$$\frac{(a+ib)}{(c+id)} = \frac{(a+ib)(c-id)}{c^2+d^2} = \frac{(ac+bc)+i(bc-ad)}{c^2+d^2}$$

## Prodotto di matrici

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A}e + \mathbf{B}g & \mathbf{A}f + \mathbf{B}h \\ \mathbf{C}e + \mathbf{D}g & \mathbf{C}f + \mathbf{D}h \end{vmatrix}$$

## Esempio col foglio di calcolo

## ESEMPIO excel

=complesso(

`COMPLESSO`(parte\_reale; coeff\_imm; [suffisso])

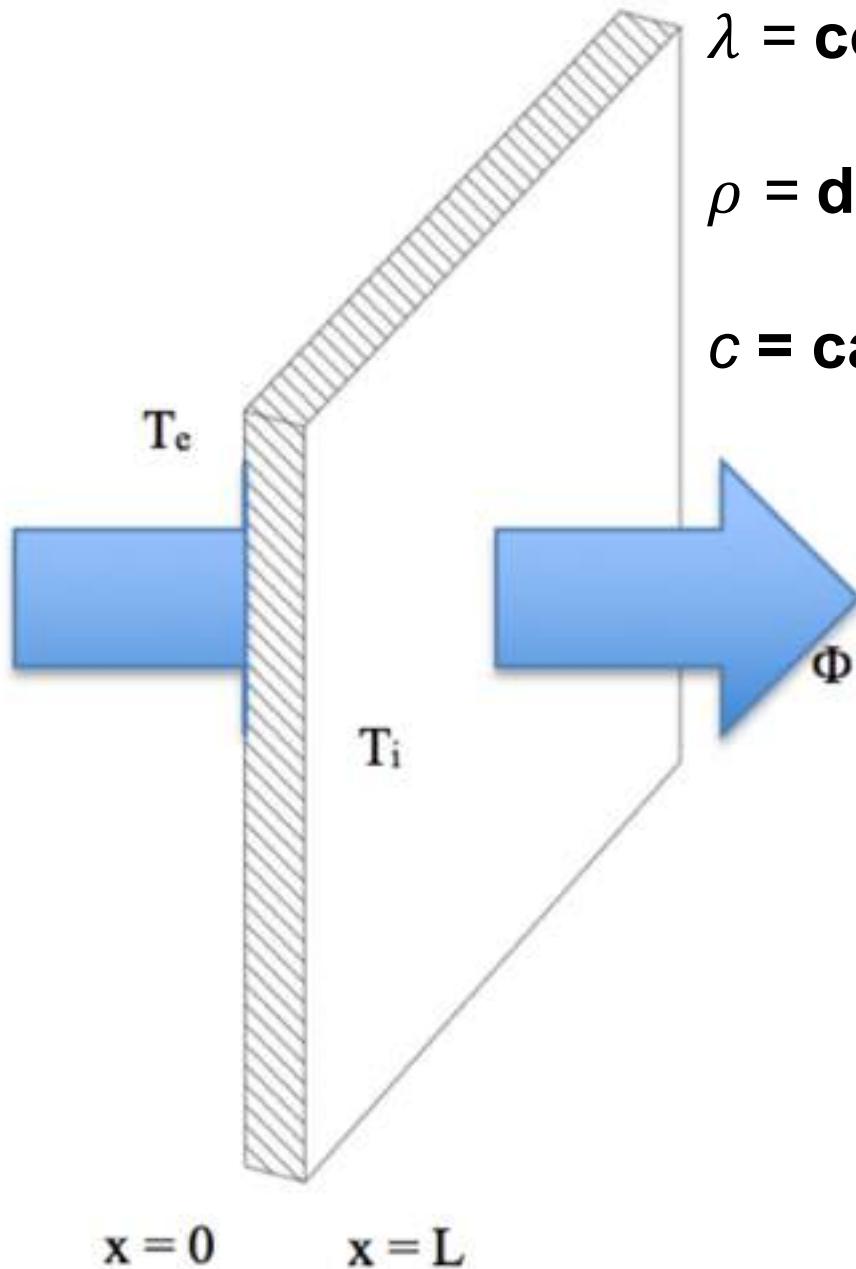
=comp.prodotto(

`COMP.PRODOTTO`(num\_comp1; [num\_comp2]; ...)

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Ae + Bg & Af + Bh \\ Ce + Dg & Ch + Dh \end{vmatrix}$$

## Esempio con foglio di calcolo Parete singol layer

# Il modello di calcolo



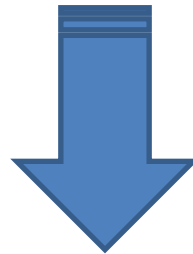
$\lambda$  = **conduttività termica** [W / (m K)]

$\rho$  = **densità volumica** [kg / m<sup>3</sup>]

$c$  = **calore specifico** [kJ / (kg K)]

## Proprietà del materiale

Thickness	Thermal conductivity	Thermal resistance	Specific Heat	Density	depth of penetration
L [m]	$\lambda$ [W/m K]	[m <sup>2</sup> K/W]	[J/kg K]	[kg/m <sup>3</sup> ]	[m]
0,20	1,80	0,11	1000,00	2400,00	0,14



$\xi=L/d$					-	-
[-]	cosh( $\xi$ )	cos( $\xi$ )	sinh( $\xi$ )	sin( $\xi$ )	d/2 $\lambda$	$\lambda/d$
1,39	2,14	0,18	1,89	0,98	-0,04	-12,53

# Il modello di calcolo

$$Z_{11} = Z_{22} =$$

$$0,379829850599403 + 1,85707093492288i$$

$$Z_{12} =$$

$$-0,0974922953372784 - 0,0706425750184684i$$

$$Z_{21} =$$

$$22,1287866245352 - 30,5394615144025i$$

internal liminal resistance Rsi [m <sup>2</sup> K/W]	External liminal resistance Rse [m <sup>2</sup> K/W]
0,13	0,04

$Z_{si}$		$Z_{se}$	
1	-0,13	1	-0,04
0	1	0	1



## Prodotto delle matrici

Il prodotto va eseguito sempre secondo l'ordine proposto: dall'esterno verso l'interno

Z1

0,379829850599403+1,85707093492288i

-0,0974922953372784-0,0706425750184684i

22,1287866245352-30,5394615144025i

0,379829850599403+1,85707093492288i

Zse·Z1

-0,505321614382005+3,07864939549898i

-0,112685489361255-0,144925412415384i

22,1287866245352-30,5394615144025i

0,379829850599403+1,85707093492288i

Zse·(-Z1)·Zsi

-0,505321614382005+3,07864939549898i

-0,0469936794915943-0,545149833830251i

22,1287866245352-30,5394615144025i

-2,49691241059018+5,82720093179521i

## Risultati

Periodic Thermal Transmittance

0,156961222609229-1,82082751018718i

Module Periodic Thermal Transmittance  $|Y_{ie}| =$

1,83

Phase shift Periodic Thermal Transmittance =

-5,674 h

Thermal Admittance int. face  $Y_{ii} = -Z_{11}/Z_{12} =$

5,52637361514142+1,40333207006164i

Thermal Admittance est. face  $Y_{ee} = -Z_{22}/Z_{12} =$

10,2184093392867+5,46109139037461i

Module Thermal Admittance int. face  $Y_{ii} = -Z_{11}/Z_{12} =$

5,70

Module Thermal Admittance est. face  $Y_{ee} = -Z_{22}/Z_{12} =$

11,59

## Risultati

External thermal capacity =

86166,802 J/(m<sup>2</sup>·K)

86,167 kJ/(m<sup>2</sup>·K)

Internal thermal capacity =

170875,37 J/(m<sup>2</sup>·K)

170,875 kJ/(m<sup>2</sup>·K)

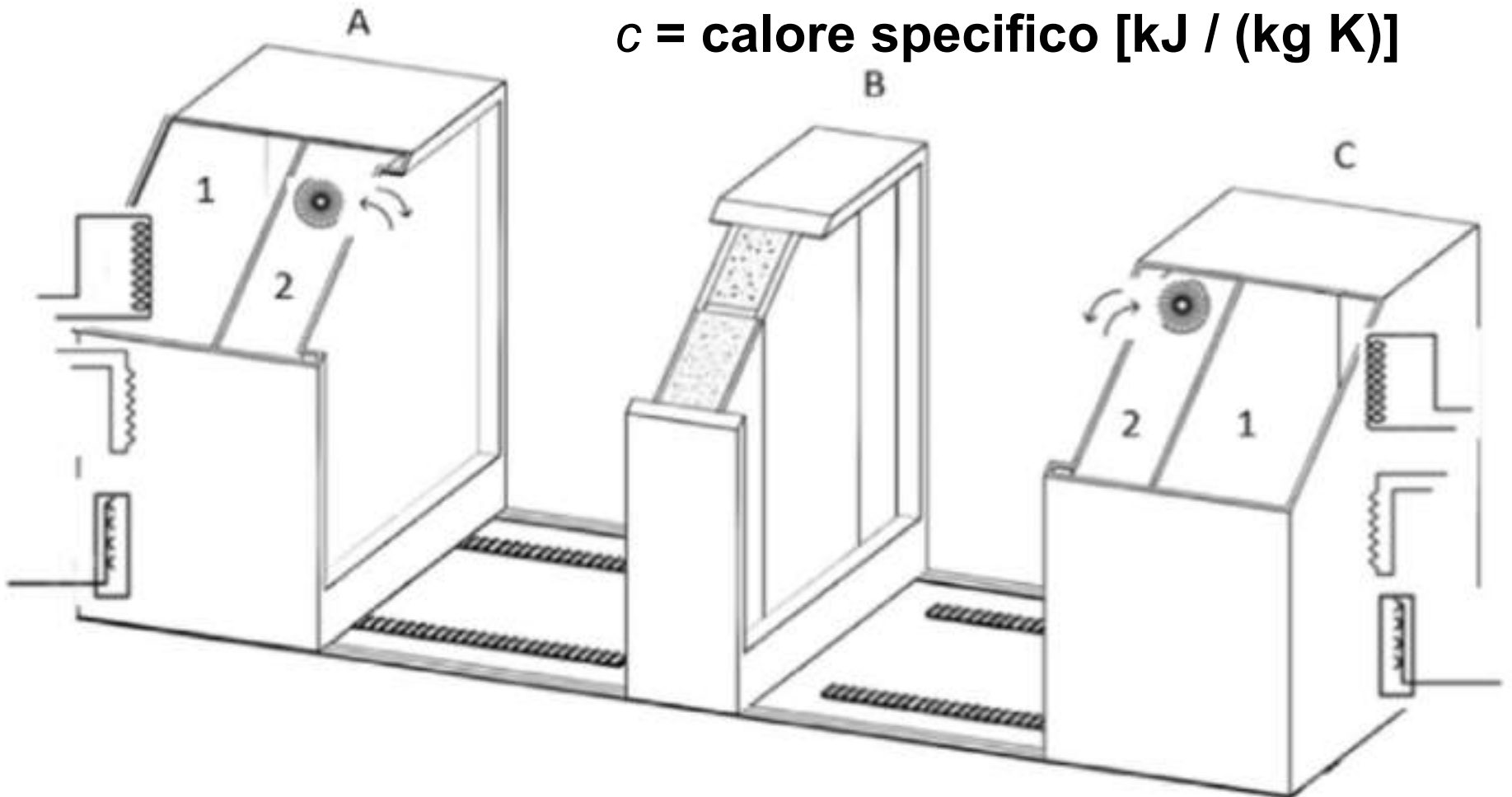
## Esempio con foglio di calcolo Parete multi layer

# Il modello di calcolo

$\lambda$  = **conduttività termica** [W / (m K)]

$\rho$  = **densità volumica** [kg / m<sup>3</sup>]

$c$  = **calore specifico** [kJ / (kg K)]



## Proprietà dei materiali

	Thickness L [m]	Thermal conductivity $\lambda$ [W/m K]	Thermal resistance [m <sup>2</sup> K/W]	Specific Heat [J/kg K]	Density [kg/m <sup>3</sup> ]	depth of penetration [m]
Layer 1	0,200	1,800	0,111	1000	2400	0,144
Layer 2	0,100	0,040	2,500	1400	30	0,162
Layer 3	0,005	1,000	0,005	1500	1200	0,124



$\xi=L/d$ [-]	cosh( $\xi$ )	cos( $\xi$ )	sinh( $\xi$ )	sin( $\xi$ )	- d/2 $\lambda$	- $\lambda/d$
1,392	2,135733	0,177845	1,887155	0,98405847	-0,040	-12,53
0,618	1,197118	0,815039	0,658096	0,57940624	-2,020	-0,247
0,04	1,0008	0,9992	0,040011	0,03998933	-0,060	-8,088

# Il modello di calcolo

$$Z_{11} = Z_{22} =$$

Layer 1

0,379829850599403+1,85707093492288i

Layer 2

0,975697452492893+0,381305074946896i

Layer 3

0,999999573333336+0,00159999995448889i

$$Z_{12} =$$

-0,0974922953372784-0,0706425750184684i

-2,48458279503923-0,31763166581493i

-0,0047999995904-2,55999996879308E-06i

$$Z_{21} =$$

22,1287866245352-30,5394615144025i

0,0388391195328157-0,303807896225094i

0,000345087995793307-0,64703994478592i

## Costruzione delle matrici

Z1

$$\begin{array}{cc} 0,379829850599403+1,85707093492288i & -0,0974922953372784-0,0706425750184684i \\ 22,1287866245352-30,5394615144025i & 0,379829850599403+1,85707093492288i \end{array}$$

Z2

$$\begin{array}{cc} 0,975697452492893+0,381305074946896i & -2,48458279503923-0,31763166581493i \\ 0,0388391195328157-0,303807896225094i & 0,975697452492893+0,381305074946896i \end{array}$$

Z3

$$\begin{array}{cc} 0,999999573333336+0,00159999995448889i & -0,0047999995904-2,55999996879308E-06i \\ 0,000345087995793307-0,64703994478592i & 0,999999573333336+0,00159999995448889i \end{array}$$



## Costruzione delle matrici

internal liminal resistance Rsi [m <sup>2</sup> K/W]	External liminal resistance Rse [m <sup>2</sup> K/W]
0,13	0,04

$$\begin{array}{c|c|c|c} & \mathbf{Z_{si}} & & \mathbf{Z_{se}} \\ \hline & 1 & -0,13 & 1 \\ & 0 & 1 & 0 \\ \hline & & & & & -0,04 \\ & & & & & 1 \end{array}$$

$Z_{3-72}$

0,9748997425867+0,384324206485611i

-2,48875589553107-0,323439624640084i

0,286381511700204-0,934929265995573i

0,768709172884479+1,99038073177958i

# Il modello di calcolo

## Prodotto delle matrici

Il prodotto va eseguito sempre secondo l'ordine proposto: dall'esterno verso l'interno

$(Z3 \cdot Z2) \cdot Z1$

-65,2942414315653+70,804374233086i	-0,41254901589691-4,85098633925881i
79,6407632331671+20,7454630523164i	-3,49826531785516+2,25447115105586i

$Zse \cdot ((Z3 \cdot Z2) \cdot Z1)$

-68,479871960892+69,9745557109933i	-0,272618403182704-4,94116518530104i
79,6407632331671+20,7454630523164i	-3,49826531785516+2,25447115105586i

$(Zse \cdot ((Z3 \cdot Z2) \cdot Z1)) \cdot Zsi$

-68,479871960892+69,9745557109933i	8,62976495173326-14,0378574277302i
79,6407632331671+20,7454630523164i	-13,8515645381669-0,44243904574527i

## Risultati

Periodic Thermal Transmittance

$-0,0317814929871802-0,0516982872522891i$

Module Periodic Thermal Transmittance  $|Y_{ie}| =$

0,06

Phase shift Periodic Thermal Transmittance =

-8,11 h

Thermal Admittance int. face  $Y_{ii} = -Z_{11}/Z_{12} =$

$5,79395725198632+1,31639624002419i$

Thermal Admittance est. face  $Y_{ee} = -Z_{22}/Z_{12} =$

$0,417350060352658+0,730163535817381i$

Module Thermal Admittance int. face  $Y_{ii} = -Z_{11}/Z_{12} =$

5,94

Module Thermal Admittance est. face  $Y_{ee} = -Z_{22}/Z_{12} =$

0,84

## Risultati

External thermal capacity =

82330,699 J/(m<sup>2</sup>·K)

82,331 kJ/(m<sup>2</sup>·K)

Internal thermal capacity =

12405,281 J/(m<sup>2</sup>·K)

12,405 kJ/(m<sup>2</sup>·K)

**FINE**